Name: ....

Matr.Nr.: .... Studienkennz.: ....

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	4	
3	5	
Summe	15	

Dauer 90 min. Alle Unterlagen sind erlaubt. Bitte benutzen Sie keinen Rotstift.

1. Gegeben ist folgendes einfache homogene Regressionsmodell mit einer unabhängigen Variablen ($K = 1$):
$$y_t = x_t\beta + u_t$$
Nehmen Sie an, dass alle Annahmen des klassischen Regressionsmodells erfüllt sind und, dass ausserdem
$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \neq 0 \text{ und } m_{xx} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2 \neq 0$$
erfüllt ist. Vergleichen Sie die folgenden drei Schätzer für β:
$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$$
$$\tilde{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$
$$\bar{\beta} = \frac{m_{yx}}{m_{xx}}$$
wobei $\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ und $m_{yx} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})$. Zeigen Sie, dass alle drei Schätzer unverzerrt sind und berechnen Sie die Varianz der drei Schätzer. Welcher Schätzer hat die kleinste Varianz?

2. Betrachten Sie ein klassisches Modell der Normalregression.

   (a) Konstruieren Sie einen Test für die Hypothese $\mathbb{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_*^2$

   (b) Konstruieren Sie ein Konfidenzintervall für σ^2.

   Hinweis: Verwenden Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Schätzers $\hat{\sigma}^2$.

3. Ein inhomogenes Regressionsmodell $y_t = \alpha + x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + u_t$ wurde simuliert ($T = 50$) und dann mit R geschätzt:

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.91191    0.13100   6.961 9.35e-09 ***
x1           0.31387    0.13015   2.412   0.0198 *
x2           0.05563    0.15938   0.349   0.7286
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.8772 on 47 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2018, Adjusted R-squared: 0.1678
F-statistic: 5.94 on 2 and 47 DF, p-value: 0.005014

# Durbin Watson Test Statistik ( und Kritische Werte )
DW=2.0336 (T=50, K=2: dL=1.46246 dU=1.62833)

# Breusch Pagan Test Statistik
BP=5.1469

# Quantille der Chi-Quadrat Verteilung
       90%   95%   99%
```

```
d=1:  2.71  3.84  6.63
d=2:  4.61  5.99  9.21
d=3:  6.25  7.81 11.34
```

(a) Testen Sie die Hypothese $\beta_1 = 0$

(b) Testen Sie die Hypothese $\beta_2 = 0$

(c) Testen Sie die Hpyothese $\beta_1 = \beta_2 = 0$

(d) Führen Sie einen einseitigen Durbin-Watson Test auf positive Autokorrelation ($H_0 : \rho = 0$ und $H_1 : \rho > 0$) zum Niveau $\alpha = 5\%$ durch.

(e) Testen Sie auf heteroskedastische Fehler. Die Breusch-Pagan Test Statistik (BP) für den Fall $z_t = (1, x_{t1}, x_{t2})$ und einige Quantille der χ^2 Verteilung mit $d = 1, 2, 3$ Freiheitsgraden sind oben angeführt.

1. $y_t = \underset{\mathbb{R}}{x_t}\beta + u_t$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \neq 0$$

$$m_{xx} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2 \neq 0$$

•) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} y_t x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2}$

$$\mathbb{E}\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\overset{x_t\beta}{\overbrace{\mathbb{E}y_t}})x_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \beta.$$

$\cancel{\operatorname{Var}\hat{\beta} = \sigma^2(X'X)^{-1} = \sigma^2\left(\sum_{t=1}^{T} x_t^2\right)^{-1} = \mathbb{E}\hat{\beta}^2 - (\mathbb{E}\hat{\beta})^2}$

$= \sum_{t=1}^{T} \underbrace{\operatorname{Var} y_t}_{\sigma^2} \cdot \left(\frac{x_t}{\sum x_t^2}\right)$

$\operatorname{Cov}(y_s,y_t) = \operatorname{Cov}(u_s,u_t) = 0$

$\left(\sum_{t=1}^{T}(y_t x_t)\right)^2$

$\cancel{•)\ \tilde{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\sum y_t}{\sum x_t}}$

$\cancel{\mathbb{E}\tilde{\beta} = \frac{\sum \overset{x_t\beta}{\mathbb{E}y_t}}{\sum x_t} = \beta.}$

$\operatorname{Var}\tilde{\beta}$

$$\operatorname{Var}\hat{\beta} = \operatorname{Var}\left(\frac{\sum y_t x_t}{\sum x_t^2}\right) = \left(\sum x_t^2\right)^{-2} \operatorname{Var}\left(\sum y_t x_t\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{Cov}(y_t, y_s) = \operatorname{Cov}(u_t, u_s) = 0}}{=} \left(\sum x_t^2\right)^{-2} \sum \underbrace{\operatorname{Var}(y_t x_t)}_{x_t^2 \operatorname{Var} y_t} = \sigma^2 \frac{\sum x_t^2}{\left(\sum x_t^2\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

$$\operatorname{Var} y_t = \operatorname{Var} u_t = \sigma_u^2$$

•) $\tilde{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\sum y_t}{\sum x_t}$

$$\mathbb{E}\tilde{\beta} = \frac{\sum \overset{x_t \beta}{\mathbb{E} y_t}}{\sum x_t} = \beta .$$

$$\operatorname{Var}\tilde{\beta} = \frac{\sum \operatorname{Var} y_t}{\left(\sum x_t\right)^2} = \sigma^2 \frac{T}{\left(\sum x_t\right)^2} = \sigma^2 \frac{1}{T \bar{x}^2}$$

•) $\bar{\beta} = \frac{m_{yx}}{m_{xx}} = \frac{\sum_t (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum_t (x_t - \bar{x})^2}$

$$\mathbb{E}\bar{\beta} = \frac{\sum \mathbb{E}(y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \underset{\uparrow}{=} \beta .$$

$$\mathbb{E}(y_t - \bar{y}) = \mathbb{E} y_t - \mathbb{E}\frac{1}{T}\sum y_s = \left(x_t - \frac{1}{T}\sum x_s\right)\beta$$

$$= (x_t - \bar{x})\beta$$

$$\bar{\beta} = \frac{m_{xy}}{m_{xx}} \overset{!}{=} \bar{D}\, y \quad \text{, Zeilenvektor!}$$

$$m_{xx} = \frac{1}{T}\sum (x_t - \bar{x})^2$$

$$m_{yx} = \frac{1}{T}\sum (x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y}) = \underbrace{\frac{1}{T}\sum (x_t-\bar{x})\, y_t}_{\frac{1}{T}(x_1-\bar{x},\, x_2-\bar{x},\, \dots)} - \underbrace{\frac{1}{T}\sum (x_t-\bar{x})\,\bar{y}}_{\left[\frac{1}{T}\sum(x_t-\bar{x})\right]\bar{y}}$$

$$\left[\frac{1}{T}\sum(x_t-\bar{x})\right] = 0$$

$$= \frac{1}{T}\sum x_t y_t - \frac{1}{T}\sum \bar{x} y_t$$

$$= \frac{1}{T}\sum x_t y_t - \bar{x}\bar{y}$$

$$\Rightarrow \bar{\beta} = \frac{1}{T m_{xx}} (x_1-\bar{x},\, x_2-\bar{x},\, \dots) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{T m_{xx}} (X - \iota \bar{x})'\, y$$

$\bar{\beta} = \bar{d} + \bar{D} y$ ist Et $\Leftrightarrow$ $\bar{d} = 0$ ✓

$\bar{D} X = 1$

$$\bar{D} X = \frac{1}{T m_{xx}} (X'X - \bar{x}\,\iota' X) = \cancel{\frac{1}{Tm_{xx}}(X - \iota\bar{x})'\iota' X}$$

$$= \frac{1}{m_{xx}} \Big(\underbrace{\frac{1}{T} X'X - \bar{x} \underbrace{\frac{1}{T}\iota' X}_{\bar{x}}}_{m_{xx}} \Big) = 1.$$

$$\operatorname{Var} \bar{\beta} = \sigma^2 \bar{D}\bar{D}' = \sigma^2 \frac{1}{T m_{xx}^2} \Big[\underbrace{(X-\iota\bar{x})'(X-\iota\bar{x}) \frac{1}{T}}_{m_{xx}} \Big] = \sigma^2 \frac{1}{T m_{xx}}$$

$$\operatorname{Var} \hat{\beta} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} = \frac{\sigma^2}{T(m_{xx} + \bar{x}^2)}$$

$$\operatorname{Var} \tilde{\beta} = \frac{\sigma^2}{T \bar{x}^2}$$

$$\operatorname{Var} \bar{\beta} = \frac{\sigma^2}{T m_{xx}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{Var}\tilde{\beta}} + \frac{1}{\operatorname{Var}\bar{\beta}} = \frac{1}{\operatorname{Var}\hat{\beta}}.$$

2. $H_0: \sigma^2 = \sigma_*^2$

$$\frac{T-K}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{T-K}$$

$$P\left[\chi_{T-K,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{T-K}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \le \chi^2_{T-K,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\left[\frac{(T-K)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{T-K,1-\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{\hat{\sigma}^2(T-K)}{\chi_{T-K,\frac{\alpha}{2}}}\right]}_{=:\,KI}$$

$$P[\sigma^2 \in KI] = 1-\alpha.$$

unter H_0: ~~...~~ $\sigma^2 = \sigma_*^2$ gilt

$$X = \frac{T-K}{\sigma_*^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{T-K}$$

H_0 wird verworfen, falls $X \notin KI$.

3. $y_t = \alpha + x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + u_t$ $(T=50)$

a) $H_0: \beta_1 = 0$ $\alpha \leq 0{,}01$: Annahme

$\alpha \geq 0{,}05$: Verwerfung

b) $H_0: \beta_2 = 0$ $\alpha < 0{,}7286$ $\Rightarrow$ ~~Verwerfung~~ Annahme.

c) $H_0: \begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix} = 0$ $0{,}005014 < \alpha$ $\Rightarrow$ Verw.

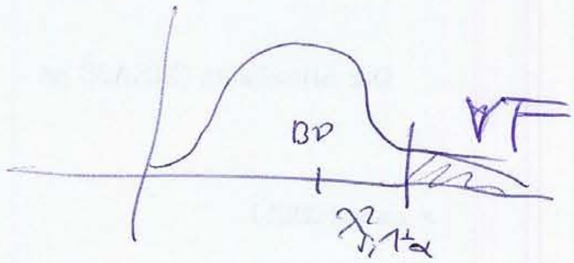
d) $H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho > 0$

$DW = 2{,}0336 \geq dU = 1{,}66283$ $\Rightarrow$ Annahme von H_0, d.h. keine pos. Korr.

e) $BP = 5{,}1469$

Wissen: $BP \xrightarrow{d} \chi^2_{S-1} = \chi^2_2$



$\alpha = 5\%$

$BP < \underset{\chi^2_{1-\alpha}}{\underbrace{7{,}81}}$ $\Rightarrow$ BP liegt im Annahmeber.

$\Rightarrow$ H_0 wird angenommen, d.h. homosked. Modell.