Name: ....

Matr.Nr.: .... Studienkennz.: ....

Bsp.	Max.	Punkte
1	6	
2	6	
3	4	
Summe	16	

Dauer 90 min. Alle Unterlagen sind erlaubt. Bitte benutzen Sie keinen Rotstift.

1. Betrachten Sie ein Regressionsmodell mit zwei Gruppen $t = 1, \ldots, T_1$ und $t = T_1+1, \ldots, T_1 + T_2 = T$. Es gelte
$$y_t = \begin{cases} x_t\beta_1 + u_t & \text{für } t = 1, \ldots, T_1 \\ x_t\beta_2 + u_t & \text{für } t = T_1+1, \ldots, T_1 + T_2 \end{cases}$$
und $\mathbf{E}u_t = 0$, $\mathbf{E}u_tu_s = 0$ für alle $t \neq s$ und $\mathbf{E}u_t^2 = \sigma_1^2$ für $t = 1, \ldots, T_1$ bzw. $\mathbf{E}u_t^2 = \sigma_2^2$ für $t = T_1 + 1, \ldots, T_1 + T_2 = T$.

   (a) Konstruieren Sie eine geeignete Matrix X, sodass Sie das Modell in der Form $y = X\beta + u$ schreiben können, wobei $\beta = (\beta_1', \beta_2')'$.

   (b) Zeigen Sie, dass der OLS Schätzer und der GLS (Aitken) Schätzer in diesem Modell übereinstimmen.

   (c) Geben Sie einen Test an, mit dem man die Hypothese von homoskedastischen Fehlern überprüfen kann ($H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$). Das heißt, geben Sie eine entsprechende Test Statistik an und deren Verteilung unter der Nullhypothese.

2. Betrachten Sie das einfache Regressions Modell $y_t = x_t\beta + u_t$, wobei $K = 1$ d.h. $x_t \in \mathbb{R}$. Die Fehler u_t haben Erwartungswert 0 ($\mathbf{E}u_t = 0$), sind unkorreliert ($\mathbf{E}u_tu_s = 0$ für $t \neq s$) und haben die Varianz $\mathbf{E}u_t^2 = t\sigma^2$. Die Beobachtungen der unabhängigen Variablen sind nach oben und unten beschränkt, im Sinne von $0 < c_1 \leq |x_t| \leq c_2 < \infty$ für alle t.

   (a) Ist der OLS Schätzer $\hat{\beta}_T$ konsistent?

   (b) Ist der GLS Schätzer $\tilde{\beta}_T$ konsistent?

   Hinweis: Betrachten Sie die Varianz der Schätzer und überlegen Sie, ob diese gegen Null konvergiert oder nicht.

3. Ein inhomogenes Regressionsmodell $y_t = \alpha + x_{t1}\beta_2 + x_{t2}\beta_2 + u_t$ wurde simuliert ($T = 50$) und dann mit R geschätzt:

   OLS Schätzung für das "volle" Modell:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.9119     0.1310   6.961 9.35e-09 ***
x1            0.2139     0.1302   1.643    0.107
x2            0.1479     0.1127   1.312    0.196
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.8772 on 47 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.2056,     Adjusted R-squared: 0.1718
F-statistic: 6.082 on 2 and 47 DF,  p-value: 0.004476
```

OLS Schätzung des Modells $y_t = \alpha + u_t$, d.h. unter der Restriktion $\beta_1 = \beta_2 = 0$:

```
Call:
lm(formula = y ~ 1)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   1.0423     0.1363   7.646 6.66e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 0.9639 on 49 degrees of freedom
```

Vergleich der beiden Modelle mit dem Befehl 'ANOVA': (Beachten Sie insbesondere: Der Wert 6.0822, der in der Spalte 'F' angegeben ist, ist die F Test Statistik für den Test auf $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$.)

```
Analysis of Variance Table
Model 1: y ~ 1
Model 2: y ~ x
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F   Pr(>F)
1     49 45.526
2     47 36.165  2     9.360 6.0822 0.004476 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Durbin Watson Test Statistik 'DW' und die kritischen Werte (d_L und d_U) für einen Test auf positive Autokorrelation zum Niveau $\alpha = 5\%$.

```
DW=2.0336 (T=50, K=2: dL=1.46246 dU=1.62833)
```

(a) Testen Sie die Hypothese $\beta_1 = 0$

(b) Testen Sie die Hypothese $\beta_2 = 0$

(c) Testen Sie die Hpyothese $\beta_1 = \beta_2 = 0$

(d) Führen Sie einen einseitigen Durbin-Watson Test auf positive Autokorrelation ($H_0 : \rho = 0$ und $H_1 : \rho > 0$) zum Niveau $\alpha = 5\%$ durch.

1.

$$y_t = \begin{cases} x_t \beta_1 + u_t & t = 1, \dots, T_1 \\ x_t \beta_2 + u_t & t = T_1+1, \dots, \underbrace{T_1 + T_2}_{T} \end{cases}$$

$\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)$

$\mathbb{E} u_t = 0$, $\mathbb{E} u_t u_s = 0 \quad t \neq s$

$$\mathbb{E} u_t^2 = \operatorname{Var} u_t = \begin{cases} \sigma_1^2 & t = 1, \dots, T_1 \\ \sigma_2^2 & t = T_1+1, \dots, T \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Var} u = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{T_2} \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_1^2 \underbrace{\begin{pmatrix} I_{T_1} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} I_{T_2} \end{pmatrix}}_{=: \Omega}$$

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{=: y} = \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}}_{=: X} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}}_{=: \beta} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}_{=: u}$$

b) Zeige, dass $\exists C \in \mathbb{R}^{K \times K}: \quad \Omega X = X C^{-1}$

$$\Omega X = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 X_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 X_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_{T_1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_{T_2} \end{pmatrix}}_{=: \cancel{\ldots}} = X \Omega.$$

~~(ist invertierbar)~~

c) GQ-Test:

$$GQ = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} \sim F_{T_2-K,\,T_1-K}$$

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \iff \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1$$

Wissen nicht a priori nicht, ob $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ wie in VS gefordert

$\Rightarrow$ beidseitiger F-Test.

H_0 wird angenommen, falls $F_{T_2-K,\,T_1-K,\,\frac{\alpha}{2}} \leq GQ \leq F_{T_2-K,\,T_1-K,\,1-\frac{\alpha}{2}}$.

3. $y_t = \alpha + x_{t1}\beta_1 + x_{t2}\beta_2 + u_t$ $\quad T = 50.$

a) $H_0: \beta_1 = 0$

~~Annahme~~ ~~Ablehnung~~, da $0{,}107 > \alpha = 0{,}\cancel{05}1$
Annahme

b) $H_0: \beta_2 = 0$

Annahme, da $0{,}196 > \alpha = 0{,}\cancel{05}1$

c) $H_0: \beta_1 = \beta_2 = 0$, d. h. $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = 0$

Abl., da $0{,}004476 \leq \alpha = 0{,}0\cancel{1}$

d) $H_0: \rho = 0$; $H_1: \rho > 0$ $\quad \alpha = 0{,}05$

$DW = 2.0336$ ~~1,46246 = dL~~

$\geq 1{,}62833 = dO \Rightarrow H_0$ wird ang.

d. h. keine pos. Korr.