Grundlagen der Ökonometrie VO 109.329
2009W Schriftliche Prüfung am 11. Februar 2010

Name: ....

Matr.Nr.: .... Studienkennz.: ....

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Summe	20	

Dauer 90 min. Alle Unterlagen sind erlaubt. Bitte benutzen Sie keinen Rotstift.

1. (Frisch-Waugh Theorem) Gegeben ist das Modell $y = X\beta + u = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$, wobei $X = (X_1, X_2)$ und $\beta = (\beta_1', \beta_2')'$ entsprechend partitioniert sind. Zeigen Sie, dass der OLS Schätzer $\hat{\beta}_1$ für β_1 durch die Regression von $(I - X_2^p)y$ auf $(I - X_2^p)X_1$ berechnet werden kann, d.h.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= (X_1'(I - X_2^p)'(I - X_2^p)X_1)^{-1}X_1'(I - X_2^p)'(I - X_2^p)y \\ &= (X_1'(I - X_2^p)X_1)^{-1}X_1'(I - X_2^p)y \end{aligned}$$

Hinweis: Multiplizieren Sie die Gleichung $y = X\hat{\beta} + \hat{u} = X_1\hat{\beta}_1 + X_2\hat{\beta}_2 + \hat{u}$ von links mit $(I - X_2^p)$.

2. Gegeben ist ein Regressionsmodell $y_t = \alpha + x_t\beta + u$ und die entsprechenden Schätzer $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{y}$ und $\hat{u}$. Berechnen Sie die OLS Schätzer für die Regression von y_t auf $\hat{y}_t$: $y_t = \gamma_1 + \hat{y}_t\gamma_2 + e_t$. Zeigen Sie:

$$\hat{\gamma}_1 = 0,\ \hat{\gamma}_2 = 1$$

Weiters ist zu zeigen, dass $R_*^2 = R_*^2$, wobei R_*^2 das zentrierte Bestimmtheitsmaß des ursprünglichen Modells und R_*^2 das zentrierte Bestimmtheitsmaß der zweiten Regression ist.

3. Betrachten Sie folgendes (homogenes) Regressionsmodell $y_t = (c^t)\beta + u_t$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ mit unabhängig, identisch verteilten Fehlern u_t, $\mathbf{E}u_t = 0$ und $\mathbf{E}u_t^2 = \sigma^2$.

   (a) Für welche Werte von c ist der OLS Schätzer $\hat{\beta}_T$ konsistent (im quadratischen Mittel).

   (b) Für welche Werte von c ist der Schätzer $\hat{\beta}_T$ asymptotisch normal verteilt. Hinweis: Überprüfen Sie, für welche Werte von c die Annahmen des Theorems über die asymptotische Verteilung des GLS/OLS Schätzers erfüllt sind.

4. Gegeben ist ein lineares Trendmodell $y_t = \alpha + t\beta + u_t$, ($x_t = t$). Dieses Modell wurde mit simulierten Daten geschätzt ($t = 1, \ldots, T = 10$):

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.2485     0.7460   1.674    0.133
x            0.2713     0.1202   2.256    0.054 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
Residual standard error: 1.092 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3889,     Adjusted R-squared: 0.3125
F-statistic: 5.091 on 1 and 8 DF,  p-value: 0.05403

DW=1.6984 (T=10, K=2: dL=0,87913 dU=1,31971)

BP=3.6096
      90%   95%   99%
d=1:  2.71  3.84  6.63
d=2:  4.61  5.99  9.21
d=3:  6.25  7.81 11.34
```

   (a) Testen Sie die Hypothese $\alpha = 0$.

   (b) Testen Sie die Hypothese $\beta = 0$.

(c) Testen Sie auf auto-korrelierte Fehler mittels des einseitigen Durbin-Watson Tests. Die Test-Statistik (DW=...) und die entsprechenden kritischen Werte (d_L und d_U) zum Niveau $\alpha = 5\%$ sind oben angeführt.

(d) Testen Sie auf heteroskedastische Fehler. Die Breusch-Pagan Test Statistik (BP=) für den Fall $z_t = (1, t)$ und einige Quantille der χ^2 Verteilung mit $d = 1, 2, 3$ Freiheitsgraden sind oben angeführt.

1. $y = X\beta + u = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$

$= (X_1, X_2)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} + u$

<u>ZZ:</u> $\hat{\beta}_1 = (X_1'(I - X_2^r)X_1)^{-1} X_1'(I - X_2^r)y$

$y = X_1\hat{\beta}_1 + X_2\hat{\beta}_2 + \hat{u}$

$\Rightarrow (I - X_2^r)y = (I - X_2^r)X_1\hat{\beta}_1 + \underbrace{(I - X_2^r)X_2\hat{\beta}_2}_{= 0} + \underbrace{(I - X_2^r)\hat{u}}_{= \hat{u} = y - \hat{y}}$

$X_1'(I - X_2^r)y = X_1'(I - X_2^r)X_1\hat{\beta}_1 + \underbrace{X_1'\hat{u}}_{0}.$

$\cancel{(I - X_2^r)X_1(X_1'(I - X_2^r)X_1)^{-1} X_1'(I - X_2^r)y}$

~~M~~

$X^r y$

$-X_2^r y = (I - X_2^r)X_1\hat{\beta}_1 - \hat{y}$

$y = (c^t)\beta + u_t \qquad c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \qquad u_t$ i.i.d.

$\Rightarrow \operatorname{Var} u = \sigma^2 I_T$

$E u_t = 0,\ E u_t^2 = \operatorname{Var} u_t = \sigma^2$

a) $\hat\beta_T$ konv. im qu. Mittel $\Leftrightarrow \operatorname{Var}\hat\beta_T \to 0$, da $\hat\beta_T$ unverzerrt.

$$\operatorname{Var}\hat\beta_T = \sigma^2 (X_T' X_T)^{-1} \qquad X_T = \begin{pmatrix} c \\ c^2 \\ \vdots \\ c^T \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \left(\sum_{t=1}^{T} c^{2t} \right)^{-1}$$

$$\sum_{t=1}^{T} c^{2t} = \sum_{t=1}^{T} (c^2)^t \begin{cases} < \infty & \text{falls } |c^2| < 1 \\ = \infty & \text{falls } c^2 \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \operatorname{Var}\hat\beta_T \to 0$ für $|c| \geq 1$.

b) $\sqrt{T}(\hat\beta_T - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2 V)$ falls zus.

- $\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} X_T' X_T\right)^{-1} = V > 0$

- $\lim_{T\to\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{T}} X_T' \right\|_\infty = 0$.

2. $y_t = \alpha + x_t\beta + u \rightarrow y_t = \underbrace{\hat{\alpha} + x_t\hat{\beta}}_{\hat{y}_t} + \hat{u}_t$

Be. OLS-Schätzer von y_t auf $\hat{y}_t$

$$y_t = \gamma_1 + \hat{y}_t \gamma_2 + v_t$$

ZZ: $\hat{\gamma}_1 = 0$, $\hat{\gamma}_2 = 1$

$$y_t = \overset{1\cdot 0}{\cancel{\gamma_1}} + \hat{y}_t \cdot 1 + \hat{u}_t$$

$$\hat{u}_t \perp \hat{y}_t$$

$$0 = \hat{u}_t' \hat{y}_t = \hat{u}_t'\hat{\alpha} + \underbrace{\hat{u}_t' x_t \hat{\beta}}_{0}$$

$$\bar{R}_*^2 = 1 - \frac{\hat{v}'\hat{v}}{(y-\iota\bar{y})'(y-\iota\bar{y})} = R_*^2.$$

— selbe wie in Urspr. Modell : $\hat{u}'\hat{u}$

$$\frac{1}{T} x_T' x_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} c^{2t}$$

$$= \lim \frac{1}{T} \frac{1-c^{2(T+1)}}{1-c^2} = \lim \frac{-c^{2(T+1)} \cdot 2\ln c}{1-c^2}$$

$$c^{2x+2} = e^{(2x+2)\ln c}$$

$$\Rightarrow e^{(2x+2)\ln c} \cdot 2\ln c$$

$$c^{2t} < c^2$$

$$c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1$$

$$c^2 < 1 \quad \Rightarrow \lim \frac{1}{T} \quad \frac{1-c^{2(T+1)}}{1-c^2} \quad \cancel{\to \infty}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{-\overset{\to 0}{c^{2(T+1)}} \cdot 2\ln c}{1-c^2} = 0$$

$$c^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim \qquad = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} x_T^{T\prime} x_T\right)^{-1} = 1 > 0 \quad \text{für } |c| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{T}} x_T'\right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{T}} \underbrace{\|x_T'\|_\infty}_{1} \to 0. \qquad \cancel{x_T = 1}$$

$$\to \sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{für determ. } c = \pm 1.$$

4. $y_t = \alpha + t\beta + u_t$ $T = 10$.

a) $H_0: \alpha = 0$

$0{,}133 > \alpha \Rightarrow$ Annahme

b) $H_0: \beta = 0$

$0{,}054 > \alpha = 0{,}05 \Rightarrow$ Annahme

$< \alpha = 0{,}01 \Rightarrow$ Verwerfen.

c) $DW = 1{,}6984 > dU = 1{,}317971 \Rightarrow$ nicht pos. Korell.

~~1,09~~

$4 - DW \approx 2{,}4 > dU = 1{,}3\ldots \Rightarrow$ nicht neg. Korell.

d) $z_t = (1, t) \Rightarrow s = 2$.

$BP \xrightarrow{d} \chi^2_1$ H_0: homosked.

$BP = 3{,}6096 < \chi^2_{1;\,0{,}95} \Rightarrow$ Ann. von H_0 für $\alpha = 0{,}05$

$> \chi^2_{1;\,0{,}9} \Rightarrow$ Abl. von H_0 für $\alpha = 0{,}1$.