10.1. Zeigen Sie, dass die Goldfeld - Quandt Test Statistik die in der Vorlesung angegebene F Verteilung hat.

10.2. Breusch - Pagan Test: Sei $g_t := (w_t(\hat{\beta})/\hat{\sigma}^2 - 1)$ und $g := (g_1, \dots, g_T)'$. Zeigen, Sie, dass die Breusch-Pagan Test Statistik gleich $BP = \frac{1}{2}g'Z^p g$. Die BP Teststatistik ist also gleich der Hälfte der erklärten Variation der Regression von g auf Z. (Hinweis: $\imath' g = 0$.)

10.3. Zeigen Sie, dass das Fehlermodell im Kapitel 6.1 ein Spezialfall des Fehlermodells im Kapitel 6.2 ist. Konstruieren Sie dazu geeignete Variable z_t.

10.4. Betrachten Sie die in Aufgabe 6.5 geschätzte Investitionsgleichung

IR $=\beta_1+\beta_2$t$+\beta_3$GNPR$+\beta_4$R$+\beta_5$PI+U

Testen Sie auf heteroskedastische Fehler und auf Autokorrelation der Fehler. Die entsprechenden Tests können Sie in R im Paket 'lmtest' finden:

```
# Goldfeld-Quandt Test
gqtest(m)
# Breusch-Pagan Test
bptest(m,studentize=FALSE)
bptest(m)
bptest(m,~t,studentize=FALSE)
bptest(m,~t)
# Durbin-Watson Test
dwtest(m,alternative='two.sided')
```

10.1./ Unter H_0: $\mathrm{Var}\, u = \sigma^2 I_T \Rightarrow \mathrm{Var}\, u_1 = \sigma^2 I_{T_1}$

$\mathrm{Var}\, u_2 = \sigma^2 I_{T_2}$

$$S.31 \Rightarrow \frac{T_1-K}{\sigma^2}\hat{\sigma}_1^2 \sim \chi^2_{T_1-K}$$

$$\frac{T_2-K}{\sigma^2}\hat{\sigma}_2^2 \sim \chi^2_{T_2-K}$$

u_1 u.o. von u_2

$\Downarrow$

$x_1,\dots,T_1$ u.o. von $x_{T-T_2+1},\dots,x_T \Rightarrow \overset{\text{Fkt. in } y_1}{\hat{u}_1}$ u.o. von $\hat{u}_2$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{T_2-K}\,\frac{T_2-K}{\sigma^2}\,\hat{\sigma}_2^2}{\frac{1}{T_1-K}\,\frac{T_1-K}{\sigma^2}\,\hat{\sigma}_1^2} = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} = GQ \sim F_{T_2-K,\,T_1-K}$$

10.3 / Modell 6.1:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \gamma_1 I_{T_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_N I_{T_N} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\overbrace{\gamma_1,\dots,\gamma_1}^{T_1},\overbrace{\gamma_2,\dots,\gamma_2}^{T_2},\dots,\overbrace{\gamma_N,\dots,\gamma_N}^{T_N})$$

$$= \mathrm{diag}(\omega_1,\dots,\omega_{T_1},\omega_{T_1+1},\dots,\omega_{T_1+T_2},\dots,\omega_{T-T_N+1},\dots,\omega_T)$$

$$\Rightarrow \omega_t = \gamma_i \text{ für } \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} T_j}_{\overset{!}{=} S_{i-1}} < t \le \underbrace{\sum_{j=1}^{i} T_j}_{\overset{!}{=} S_i} \quad i = 1,\dots,N$$

Modell 6.2: $\omega_t \overset{!}{=} h(\underset{\mathbb{R}^{1\times s}}{z_t},\delta) = z_t\delta = \gamma_i$ für $z_t = \begin{cases} e_1' & t \le T_1 \\ e_1' + e_i' & t > T_1 \wedge S_{i-1} \le t \le S_i \end{cases}$

$$\delta = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N - \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$= e^{z_t\tilde{\delta}}$ für z_t w.o., $\tilde{\delta} := \ln\delta$ (VS: $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_i > \gamma_1\ \forall i > 1$)

10.2 | $w_t(\hat\beta) = \hat u_t^2 \quad , \quad \hat\sigma^2 = \frac{1}{T}\hat u'\hat u$

$$g_t := \frac{w_t(\hat\beta)}{\hat\sigma^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{1}{\hat\sigma^2} w(\hat\beta) - \iota$$

$$\iota' g = \frac{1}{\hat\sigma^2}\underbrace{\iota' w(\hat\beta)}_{\hat u'\hat u} - \iota'\iota = T - T = 0$$

$$Z = (\iota, Z_2) \, , \quad \tilde Z_2 := (I - \iota^\gamma) Z_2 \quad \Rightarrow \quad \iota \perp \tilde Z_2$$

$$\Rightarrow \quad Z^\gamma = (\iota, Z_2)^\gamma = (\iota, \tilde Z_2)^\gamma = \iota^\gamma + \tilde Z_2^\gamma$$

$$g' Z^\gamma g = g'(\iota^\gamma + \tilde Z_2^\gamma) g = g'\iota\underbrace{\iota' g}_{0} + g'\tilde Z_2^\gamma g$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \tilde Z_2'\iota = 0}}{=} \frac{1}{\hat\sigma^4} w(\hat\beta)' \tilde Z_2^\gamma w(\hat\beta) = 2BP.$$

10.4

```
> setwd("E:/Users/Martin/Dokumente/Studium/5. Sem/Ökonometrie/Übung 6")
> investment <- read.table("DatS_03.txt", header=TRUE, comment.char="#")

> attach(investment)

> IR <- 100*INVEST/CPI
> GNPR <- 100*GNP/CPI
> PI <- c(NaN,100*diff(CPI)/CPI[1:14])
> t <- YEAR-1967
> m<-lm(IR ~ t + GNPR + R + PI)

> library(lmtest)
```

> # Goldfeld-Quandt-Test

```
> gqtest(m,alt="t")
        Goldfeld-Quandt test
data:  m
GQ = 1.6485, df1 = 2, df2 = 2, p-value = 0.7551
```

Die Nullhypothese homoskedastischer Fehler wird angenommen.

> # Breusch-Pagan-Test

```
> bptest(m,studentize=FALSE)
        Breusch-Pagan test
data:  m
BP = 4.742, df = 4, p-value = 0.3148


> bptest(m)
        studentized Breusch-Pagan test
data:  m
BP = 5.5484, df = 4, p-value = 0.2355
```

, $z=(1,t)$

```
> bptest(m,~t,studentize=FALSE)
        Breusch-Pagan test
data:  m
BP = 0.6251, df = 1, p-value = 0.4292
```

$\hat{u}$ gg. $\hat{y}$.

```
> bptest(m,~t)
        studentized Breusch-Pagan test
data:  m
BP = 0.7314, df = 1, p-value = 0.3924
```

Die Nullhypothese homoskedastischer Fehler wird in allen Test angenommen.

```
> # Durbin-Watson-Test

> dwtest(m,alternative="two.sided")

	Durbin-Watson test

data:  m
DW = 2.5257, p-value = 0.9442
alternative hypothesis: true autocorelation is not 0
```

Die Nullhypothese unkorrelierter Fehler wird angenommen.

Res(t) gg. Res(t-1)