8.1. Gegeben sei eine Stichprobe $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ und $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Zeigen Sie, dass die Varianz des GLS Schätzer $\tilde{\beta}_T$ eine monoton nicht wachsende Funktion der Stichprobengröße T ist, d.h. $\mathbf{Var}(\tilde{\beta}_{T+1}) \leq \mathbf{Var}(\tilde{\beta}_T)$. Hinweis: verwenden Sie das Gauss-Markov-Aitken Theorem.

8.2. Betrachten Sie ein einfaches Trendmodell $y_t = \alpha + \beta \cdot t + u_t$ mit AR(1) Fehlern $\mathbf{E} u_t u_s = \sigma^2 \rho^{|t-s|}/(1-\rho^2)$. Berechnen Sie die relative Effizienz des OLS Schätzers $\hat{\beta}$ in Vergleich zum GLS Schätzer $\tilde{\beta}$: eff $:= \mathbf{Var}(\hat{\beta})/\mathbf{Var}(\tilde{\beta})$ für $T = 10$ und $\rho = -0.9, -0.8, \ldots, 0.8, 0.9$. (Am einfachsten ist es, diese Effizienz numerisch zu berechnen. Es ist nicht nötig, dass Sie eine "analytische Formel" ableiten.)

8.3. Zeigen Sie, dass der OLS und der GLS Schätzer für das folgende inhomogene Modell übereinstimmen (equi-correlation): mittels $X^T \Omega = Q X^T$

$$y = \imath\alpha + X\beta + u, \ \ \mathbf{E}u = 0, \ \ \mathbf{Var}(u) = \sigma^2 \Omega$$

$$\Omega = (1-\rho) I_T + \rho \imath \imath', \ 0 \leq \rho \leq 1$$

8.4. Beweisen Sie Lemma 5.6. Es genügt, wenn Sie den Beweis für den Fall $k = 1$ (also für eine Folge von Zufallsvariablen) führen.

8.1

$$y_{T+1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \\ y_{T+1} \end{pmatrix} = \beta x_{T+1} + u_{T+1} \qquad \operatorname{Var} u_{T+1} = \sigma^2 \Omega_{T+1}$$

GMA-Theorem:

$$\tilde{\beta}_{T+1} = \left(x_{T+1}' \, \Omega_{T+1}^{-1} \, x_{T+1}\right)^{-1} x_{T+1}' \, \Omega_{T+1}^{-1} \, y_{T+1}$$ ist der BLUE in obigem Modell d.h.

$$\operatorname{Var} \tilde{\beta}_{T+1} \leq \operatorname{Var} \check{\beta} \quad \forall \check{\beta} \in \mathbb{R} \text{ mit } \check{\beta} = d + D\, y_{T+1}$$

also speziell für

$$\check{\beta} = \Big(\underbrace{\left(x_T' \, \Omega_T^{-1} \, x_T\right)^{-1} x_T' \, \Omega_T^{-1}}_{\in \mathbb{R}^{1 \times T}}, 0\Big) \underbrace{\begin{pmatrix} y_T \\ y_{T+1} \end{pmatrix}}_{y_{T+1}} = \tilde{\beta}_T .$$

8.2

$$y_t = \alpha + \beta t + u_t \qquad E u_t u_s = \operatorname{Cov} u_t u_s = \sigma^2 \frac{\rho^{|t-s|}}{(1-\rho)^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var} u = \sigma^2 \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho^{T-1} & \cdots & & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}\begin{pmatrix}\tilde\alpha \\ \tilde\beta\end{pmatrix} = \sigma^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}\begin{pmatrix}\hat\alpha \\ \hat\beta\end{pmatrix} = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1}$$

$$(X'X)^{-1}X'y$$

$$\Rightarrow \text{eff} = \frac{\operatorname{Var}\hat\beta}{\operatorname{Var}\tilde\beta} = \frac{\left[(X'X)^{-1}\, X'\Omega X\, (X'X)^{-1}\right]_{22}}{\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}\right]_{22}}$$

$$\cancel{(X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1} X'\Omega^{-1} X}$$

```
interface(rtablesize=infinity):
with(LinearAlgebra):
X:=Transpose(Matrix(2,10,[seq(1,i=1..10),seq(t,t=1..10)])):
Omega:=rho->1/(1-rho^2)*ToeplitzMatrix([seq(rho^i,i=0..9)],
symmetric);
```

$$\Omega := \rho \rightarrow \frac{LinearAlgebra\text{:-}ToeplitzMatrix\left(\left[seq\left(\rho^{i}, i=0..9\right)\right], symmetric\right)}{1-\rho^{2}} \qquad (1)$$

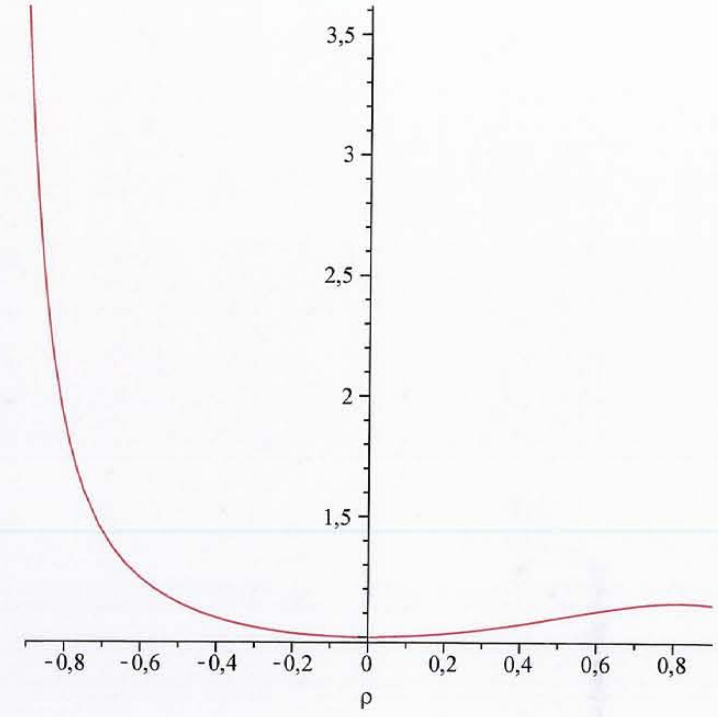
```
eff:=rho->((Transpose(X).X)^(-1).Transpose(X).Omega(rho).X.
(Transpose(X).X)^(-1))[2,2]/((Transpose(X).Omega(rho)^(-1).X)^
(-1))[2,2];
```

$$= \rho \rightarrow \left(\left(\frac{1}{LinearAlgebra\text{:-}Transpose(X).X}\right).LinearAlgebra\text{:-}Transpose(X).\Omega(\rho).X \cdot \left(\frac{1}{LinearAlgebra\text{:-}Transpose(X).X}\right)\right)_{2,2} \Big/ \left(\frac{1}{LinearAlgebra\text{:-}Transpose(X).\left(\frac{1}{\Omega(\rho)}\right).X}\right)_{2,2} \qquad (2)$$

```
c:=Vector([seq(i/10,i=-9..9)]):
eff_c:=map(eff,c):
evalf(Matrix([c,eff_c]));
```

$$\begin{bmatrix} -0.9000000000 & 3.614197177 \\ -0.8000000000 & 1.883037090 \\ -0.7000000000 & 1.431728807 \\ -0.6000000000 & 1.241970322 \\ -0.5000000000 & 1.140228564 \\ -0.4000000000 & 1.078756489 \\ -0.3000000000 & 1.040143027 \\ -0.2000000000 & 1.016542543 \\ -0.1000000000 & 1.003902558 \\ 0. & 1. \\ 0.1000000000 & 1.003608253 \\ 0.2000000000 & 1.014041676 \\ 0.3000000000 & 1.030798167 \\ 0.4000000000 & 1.053144609 \\ 0.5000000000 & 1.079558224 \\ 0.6000000000 & 1.107040685 \\ 0.7000000000 & 1.130493695 \\ 0.8000000000 & 1.142597222 \\ 0.9000000000 & 1.134969941 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

```
> plot(eff(rho),rho=-0.9..0.9);
```



8.3) $y = (\iota, X)\binom{\alpha}{\beta} + u, \quad \mathbb{E}u = 0, \quad \operatorname{Var} u = \sigma^2\Omega$ mit

$$\Omega = (1-\rho)I_T + \rho\,\iota\iota' \quad (\rho \in [0,1])$$

OLS- u. GLS-Schätzer stimmen überein, falls $(\iota, X)^r\Omega = \Omega(\iota, X)^r$

$$(\iota, X)^r\Omega = (1-\rho)(\iota, X)^r + \rho\,\underbrace{(\iota, X)^r\iota}_{\iota}\,\iota' = (1-\rho)(\iota, X)^r + \rho\,\iota\iota'$$

$$\Omega(\iota, X)^r = (1-\rho)(\iota, X)^r + \rho\,\iota\,\underbrace{\iota'(\iota, X)^r}_{=[(\iota, X)^r]' \;=\; [(\iota, X)^r\iota]' = \iota'} = (1-\rho)(\iota, X)^r + \rho\,\iota\iota'.$$

8.4

„$\Rightarrow$" $x_n \xrightarrow{P} x_0$ d.h. $\lim_{n\to\infty} P[|x_n - x_0| > \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{[x_0 \le x-\varepsilon] \setminus [x_0 \le x-\varepsilon \wedge |x_n - x_0| > \varepsilon]} \subseteq [x_n \le x] \subseteq [x_0 \le x+\varepsilon] \cup [|x_n - x_0| > \varepsilon]$$

$$\Rightarrow F_0(x-\varepsilon) - P[|x_n - x_0| > \varepsilon] \le P(\qquad) \le F_n(x) \le F_0(x+\varepsilon) + P[|x_n - x_0| > \varepsilon]$$

$$\Rightarrow F_0(x-\varepsilon) \le \lim_n F_n(x) \le F_0(x+\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow F_0(x) = \lim_n F_n(x)$ falls F_0 stetig in x

also $x_n \xrightarrow{d} x_0$

„$\Leftarrow$" $x_n \xrightarrow{d} x_0$ d.h. $\lim_n F_n(x) = F_0(x) = 1\!\!1_{[x_0,\infty)}(x) \qquad \forall x \in S_{F_0}$

$(x_n \sim F_n,\ x_0 \sim F_0)$ d.h. $x \neq x_0$.

$$\lim_n P[|x_n - x_0| > \varepsilon] = P[x_n > x_0 + \varepsilon] + P[x_n < x_0 - \varepsilon]$$

$$[|x_n - x_0| > \varepsilon] = [x_n > x_0 + \varepsilon] \cup [x_n < x_0 + \varepsilon]$$

$$= 1 - F_n(x_0+\varepsilon) + \underbrace{F_n^-(x_0-\varepsilon)}_{\le F_n(x_0-\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \lim_n P[|x_n - x_0| > \varepsilon] \le 1 - \underbrace{F_0(x_0+\varepsilon)}_{=1} + \underbrace{F_0(x_0-\varepsilon)}_{=0} = 0. \qquad \forall \varepsilon > 0.$$