7.1. Gegeben ist das Modell $y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$. Die OLS Schätzung liefert $y = X_1\hat{\beta}_1 + X_2\hat{\beta}_2 + \hat{u}$ für das volle Modell und $y = X_1\tilde{\beta}_1 + \tilde{u}$ für das Modell unter der Restriktion $\beta_2 = 0$. Nun betrachten wir Regression von $\tilde{u}$ auf (X_1, X_2)

$$\tilde{u} = X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + v$$

Die OLS Schätzung liefert

$$\tilde{u} = X_1\hat{\gamma}_1 + X_2\hat{\gamma}_2 + \hat{v}$$

Zeigen Sie, dass $\hat{u} = \hat{v}$ und dass der F-Test für $\beta_2 = 0$ äquivalent ist zum F-Test für $\gamma_2 = 0$.

7.2. Betrachten Sie folgendes Regressionsmodell

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{X} \\ \vdots \\ \bar{X} \end{pmatrix} \beta + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix}$$

wobei y_i, u_i N-dimensionale Zufallsvektoren sind und $\bar{X} \in \mathbb{R}^{N\times K}$ und $\beta \in \mathbb{R}^K$. Die Fehler u_i erfüllen die Annahmen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}u_i &= 0 \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{E}u_i u_i' = \mathbf{Var}(u_i) &= \sigma^2\gamma_i I_N \\ \mathbf{E}u_i u_j' = \mathbf{Cov}(u_i, u_j) &= 0 \in \mathbb{R}^{N\times N}\ i \neq j \end{aligned}$$

Sei $\hat{\beta}_i = (\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}'y_i$ der OLS Schätzer für β in der i-ten Gruppe ($y_i = \bar{X}\beta + u_i$). Zeigen Sie, dass der Aitken Schätzer für den gesamten Datensatz gegeben ist durch:

$$\tilde{\beta} = \sum_{i=1}^{s} \delta_i \hat{\beta}_i, \quad \delta_i = \frac{\gamma_i^{-1}}{\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} + \cdots + \gamma_s^{-1}}$$

7.3. Betrachten Sie noch einmal das obige Modell für den Fall $s = 2$. Berechnen Sie die Varianz des GLS Schätzers $\tilde{\beta}$ und die Varianz des OLS Schätzers $\hat{\beta}$ und vergleichen Sie die beiden Varianzen. Verifizieren Sie die Ungleichung $\mathbf{Var}(\hat{\beta}) \geq \mathbf{Var}(\tilde{\beta})$. Wann gilt $\mathbf{Var}(\tilde{\beta}) = \mathbf{Var}(\hat{\beta})$.

7.4. Betrachten Sie folgendes Regressionsmodell

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{X} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix}$$

wobei y_i, u_i N-dimensionale Zufallsvektoren sind und $\bar{X} \in \mathbb{R}^{N\times K}$ und $\beta_i \in \mathbb{R}^K$. Die Fehler u_i erfüllen die Annahmen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}u_i &= 0 \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{E}u_i u_i' = \mathbf{Var}(u_i) &= \sigma^2\gamma_{ii} I_N \\ \mathbf{E}u_i u_j' = \mathbf{Cov}(u_i, u_j) &= \sigma^2\gamma_{ij} I_N\ i \neq j \end{aligned}$$

wobei $\Gamma = (\gamma_{ij}) \in \mathbb{R}^{s\times s}$ posititiv definit ist. Zeigen Sie, dass der OLS Schätzer und der Aitken Schätzer in diesem Modell übereinstimmen.

7.1)
$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$
$$y = X_1\hat\beta_1 + X_2\hat\beta_2 + \hat u \qquad \rightsquigarrow \hat u = (I - X^{\pi})\,y$$
$$y = X_1\tilde\beta_1 + \tilde u \qquad \rightsquigarrow \tilde u = (I - X_1^{\pi})\,y$$

$$\tilde u = X_1\gamma_1 + X_2\gamma_2 + v$$
$$\tilde u = X_1\hat\gamma_1 + X_2\hat\gamma_2 + \hat v \qquad \rightsquigarrow \hat v = (I - X^{\pi})\,\tilde u$$

$$\begin{aligned}
\hat v &= (I - X^{\pi})\,\tilde u \\
&= (I - X^{\pi})(I - X_1^{\pi})\,y \\
&= (I - X_1^{\pi} - X^{\pi} + X^{\pi}X_1^{\pi})\,y \\
&= \hat u + (X^{\pi}X_1^{\pi} - X_1^{\pi})\,y \\
&= \hat u + (X^{\pi} - I)\,X_1^{\pi}y \\
&= \hat u - (I - X^{\pi})\,\underbrace{X_1^{\pi}y}_{\in [X_1] \subseteq [X]} = \hat u .
\end{aligned}$$

$H_0: \gamma_2 = 0$

$$F = \frac{T-k}{s}\,\frac{\tilde v'\tilde v - \hat v'\hat v}{\hat v'\hat v} = \frac{T-k}{s}\,\frac{\tilde v'\tilde v - \hat u'\hat u}{\hat u'\hat u}$$
$$= \frac{T-k}{s}\,\frac{\tilde u'(I - X_1^{\pi})\tilde u - \hat u'\hat u}{\hat u'\hat u}$$
$$= \frac{T-k}{s}\,\frac{\tilde u'\tilde u - \hat u'\hat u}{\hat u'\hat u}$$

$\nwarrow$ $H_0: \beta_2 = 0$.

7.4) OLS im allg. Modell effizient $\Leftrightarrow \exists C: \ \Omega X = X \cdot C^{-1}$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar X & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_S \end{pmatrix}$$

$y_i, u_i \in \mathbb{R}^{N\times 1}, \quad \bar X \in \mathbb{R}^{N\times K}, \quad \beta_i \in \mathbb{R}^K$

$\mathbb{E} u_i = 0$

$\mathrm{Var}\, u_i = \sigma^2 \gamma_{ii} I_N$

$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \sigma^2 \gamma_{ij} I_N \qquad i \neq j$

$$\mathrm{Var}\, u = \begin{pmatrix} \sigma^2\gamma_{11} I_N & \cdots & \sigma^2\gamma_{1S} I_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2\gamma_{S1} I_N & \cdots & \sigma^2\gamma_{SS} I_N \end{pmatrix} = \sigma^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} I_N & \cdots & \gamma_{1S} I_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{S1} I_N & \cdots & \gamma_{SS} I_N \end{pmatrix}}_{\Omega}$$

$$\Omega X = \begin{pmatrix} \gamma_{11} I_N & \cdots & \gamma_{s1} I_N \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{s1} I_N & \cdots & \gamma_{ss} I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} \overline{X} & \cdots & \gamma_{s1} \overline{X} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{s1} \overline{X} & \cdots & \gamma_{ss} \overline{X} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{X} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{X} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} I_K & \cdots & \gamma_{1s} I_K \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{s1} I_K & \cdots & \gamma_{ss} I_K \end{pmatrix}}_{\tilde{\Omega}}$$

$$= X \cdot C^{-1} \quad \text{für } \tilde{\Omega} = C^{-1}$$

$\Rightarrow C = \tilde{\Omega}^{-1}$ (existiert, da Γ pos. def.)

Multivariate Regression:

$$y_t = x_t B + u_t$$

$$(y_{t1}, \dots, y_{ts}) = (x_{t1}, \dots, x_{tK}) \begin{pmatrix} B_1, \dots, B_s \end{pmatrix} + (u_{t1}, \dots, u_{ts})$$

$$\mathbb{E}\, u_t' u_t = \sigma^2 \Gamma$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{T1} \\ \hline y_{12} \\ \vdots \\ y_{T2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{matrix}} & 0 \\ & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{B_1} \\ \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

7.2)

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_S \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{X} \\ \vdots \\ \bar{X} \end{pmatrix}}^{=:X} \beta + \overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_S \end{pmatrix}}^{=:u}$$

$y_i, u_i \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $\bar{X} \in \mathbb{R}^{N \times K}$, $\beta \in \mathbb{R}^K$

$\mathbb{E} u_i = 0 \in \mathbb{R}^N$

$\mathrm{Var}\, u_i = \sigma^2 \gamma_i I_N$

$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0 \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad i \neq j$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\, u = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}\, u_1 & \mathrm{Cov}(u_2, u_1) & \cdots & \mathrm{Cov}(u_S, u_1) \\ \mathrm{Cov}(u_1, u_2) & \mathrm{Var}\, u_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(u_1, u_S) & \cdots & \cdots & \mathrm{Var}\, u_S \end{pmatrix}$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_1 I_N & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_S I_N \end{pmatrix}}_{=:\Omega} \in \mathbb{R}^{SN \times SN}$$

$$\tilde{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1} y = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} (\Omega^{-1}X)' y$$

$$\Omega^{-1} X = \begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} I_N & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_S^{-1} I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \vdots \\ \bar{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} \bar{X} \\ \vdots \\ \gamma_S^{-1} \bar{X} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X'\Omega^{-1}X = \sum_{j=1}^{S} \left(\gamma_i^{-1} \bar{X}'\bar{X} \right) = \left(\sum_{j=1}^{S} \gamma_i^{-1} \right) \bar{X}'\bar{X}$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = \left(\sum_{j=1}^{s} \gamma_j^{-1}\right)^{-1} (\overline{X}'\overline{X})^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1^{-1}\,\overline{X}' \\ \vdots \\ \gamma_s^{-1}\,\overline{X}' \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \left[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{s} \gamma_j^{-1}\right)^{-1} \gamma_i^{-1}}_{\delta_i} (\overline{X}'\overline{X})^{-1}\, \overline{X}' y_i \right] = \sum_{i=1}^{s} \delta_i \hat{\beta}_i \,.$$

7.3) $\operatorname{Var}\tilde{\beta} = \sigma^2 (X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \sigma^2 \dfrac{1}{\gamma_1^{-1}+\gamma_2^{-1}} (\bar{X}'\bar{X})^{-1}$

$$\operatorname{Var}\hat{\beta} = \operatorname{Var}\left((X'X)^{-1}X'y\right) = (X'X)^{-1}X' \underbrace{\operatorname{Var} y}_{\operatorname{Var} u \,=\, \sigma^2\Omega} X (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (X'X)^{-1} X'\Omega X (X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (2\bar{X}'\bar{X})^{-1} (\gamma_1+\gamma_2)\bar{X}'\bar{X} (2\bar{X}'\bar{X})^{-1}$$

$$= \sigma^2 \frac{\gamma_1+\gamma_2}{4} (\bar{X}'\bar{X})^{-1}$$

Ann:

$$\operatorname{Var}\hat{\beta} < \operatorname{Var}\tilde{\beta} \iff \frac{\gamma_1+\gamma_2}{4} < \frac{1}{\gamma_1^{-1}+\gamma_2^{-1}}$$

$$\iff \underbrace{\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}}_{=\,\frac{\gamma_1+\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2}} = \gamma_1^{-1}+\gamma_2^{-1} < \frac{4}{\gamma_1+\gamma_2}$$

$$\iff \underbrace{(\gamma_1+\gamma_2)^2}_{=\,\gamma_1^2+2\gamma_1\gamma_2+\gamma_2^2} < 4\gamma_1\gamma_2$$

$$\iff \gamma_1^2 - 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2 = (\gamma_1-\gamma_2)^2 < 0 \qquad ↯$$

$\Rightarrow \operatorname{Var}\hat{\beta} \geq \operatorname{Var}\tilde{\beta}$.

$\operatorname{Var}\hat{\beta} = \operatorname{Var}\tilde{\beta} \iff \gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow$ homosked. Modell.