3.1. Verifizieren Sie folgende Formel für die Inverse einer symmetrischen Blockmatrix ($A_{11} = A'_{11}$, $A_{22} = A'_{22}$, $A_{12} = A'_{21}$) unter der Annahme $\det(A_{22}) \neq 0$ und $\det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \neq 0$:

nur hinr.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{11}A_{12}A_{22}^{-1}. \\ -A_{22}^{-1}A_{21}X_{11} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}X_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \quad X_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

(Mit Hilfe dieser Formel lässt sich das Frisch-Waugh Theorem auch beweisen.)

3.2. Die *Spur* einer quadratischen Matrix ist definiert als die Summe der Diagonal-Elemente der Matrix: $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Spur von quadratischen Matrizen:

- ❑ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A')$
- ❑ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a, b \in \mathbb{R}$: $\mathrm{tr}(aA + bB) = a\mathrm{tr}(A) + b\mathrm{tr}(B)$
- ❑ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$:$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
- ❑ $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch: $A \geq B \Longrightarrow \mathrm{tr}(A) \geq \mathrm{tr}(B)$ bzw. $A > B \Longrightarrow \mathrm{tr}(A) > \mathrm{tr}(B)$.

3.3. Gegeben sind $x_t, y_t \in \mathbb{R}$, $t = 1, \ldots, T$. Betrachten Sie die (einfache lineare) Regression $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ von y auf x und die umgekehrte Regression: $x_t = \gamma + \delta y_t + v_t$. Zeigen Sie, dass im allgemeinen $\hat{\beta}\hat{\delta} \neq 1$. (Warum gilt diese Beziehung nicht?) Unter welcher Bedingung gilt $\hat{\beta}\hat{\delta} = 1$?

3.4. Betrachten sie die inhomogene Regression $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$ (für $K \geq 1$). Die entsprechenden OLS Schätzer seien $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{y}$ und $\hat{u}$.

- ❑ Berechnen Sie die Regression von y_t auf $\hat{y}_t$: $y_t = \gamma_1 + \hat{y}_t\gamma_2 + v_t$ und vergleichen Sie das Bestimmtheitsmaß dieser Regression mit dem Bestimmtheitsmaß der ursprünglichen Regression.
- ❑ Berechnen Sie die Regression von y_t auf $\hat{u}_t$: $y_t = \theta_1 + \hat{u}_t\theta_2 + w_t$ und vergleichen Sie das Bestimmtheitsmaß dieser Regression mit dem Bestimmtheitsmaß der ursprünglichen Regression.

16.11.10

Ökonometrie UE

III. 1, Zeige

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} X_{11} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} X_{11} A_{12} A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{k_1} & O \\ O & E_{k_2} \end{pmatrix}$$

wobei $A_{11} \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_1}$ mit $A_{11} = A_{11}'$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{k_2 \times k_2}$ mit $A_{22} = A_{22}'$

$A_{12} \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_2}$ mit $A_{12} = A_{21}'$, $X_{11} := (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_1}$

-) $A_{11} X_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} X_{11} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) X_{11} = E_{k_1}$

-) $-A_{11} X_{11} A_{12} A_{22}^{-1} + A_{12} A_{22}^{-1} + A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} X_{11} A_{12} A_{22}^{-1}$

$= (\underbrace{-A_{11} X_{11} + E_{k_1} + A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} X_{11}}) A_{12} A_{22}^{-1} = O_{k_1 \times k_2}$

$(-A_{11} + A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) X_{11} = -X_{11}^{-1} X_{11} = -E_{k_1}$

-) $-A_{21} X_{11} A_{12} A_{22}^{-1} + E_{k_2} + E_{k_2} A_{21} X_{11} A_{12} A_{22}^{-1} = E_{k_2}$

-) $A_{21} X_{11} - E_{k_2} A_{21} X_{11} = O_{k_2 \times k_1}$

2) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

a) $tr(A) = tr(A')$ trivial.

b) $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$; $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow tr(aA + bB) = tr(aA) + tr(bB) = a\, tr(A) + b\, tr(B)$.

c) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$\Rightarrow tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij}}_{(BA)_{jj}} = tr(BA)$

d) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm.

-) $A \geq B$ d.h. $x'(A-B)x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

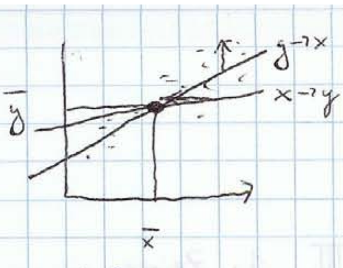
$\Rightarrow e_i'(A-B)e_i = a_{ii} - b_{ii} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow tr(A) \geq tr(B)$

-) $A > B$ d.h. $x'(A-B)x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow tr(A) > tr(B)$ analog.

3) $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\beta} = \frac{m_{xy}}{m_{xx}}$

$x_t = \cancel{\alpha} + \delta y_t + v_t \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\delta} = \frac{m_{yx}}{m_{yy}}$



$$\Rightarrow \hat{\beta}\hat{\delta} = \frac{m_{xy}}{m_{xx}} \cdot \frac{m_{yx}}{m_{yy}} = \frac{m_{xy}^2}{m_{xx}\, m_{yy}} = r_{xy}^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \hat{\beta}\hat{\delta} \le 1$$

$\hat{\beta}\hat{\delta} = 1 \Leftrightarrow |r_{xy}| = 1$ d.h. es besteht ~~linearer~~ affiner Zusammenhang zwischen x_t und y_t, d.h. $\exists \lambda: \ y_t = \lambda_1 x_t + \lambda_2 \ \forall t = 1, \dots, T$.

4) $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \quad \Rightarrow \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$ $\qquad R^2 = \frac{m_{\hat{y}\hat{y}}}{m_{yy}} = 1 - \frac{m_{\hat{u}\hat{u}}}{m_{yy}}$

$\hat{\beta} = \frac{m_{xy}}{m_{xx}}$

$\hat{u} = y - \hat{y}$

$\hat{y} = \hat{\alpha} + \beta x$

a) $y_t = \gamma_1 + \hat{y}_t \gamma_2 + v_t \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma}_1 = \bar{y} - \hat{\gamma}_2 \overset{= \bar{y}}{\overline{\hat{y}}} = \bar{y}(1 - \hat{\gamma}_2)$

$\hat{\gamma}_2 = \frac{m_{y\hat{y}}}{m_{\hat{y}\hat{y}}}$

~~$m_{y\hat{y}} = \mathrm{Cov}(y, \hat{y}) = \hat{\beta}\, \mathrm{Cov}(y, x) = \hat{\beta}\beta\, \mathrm{Cov}(x,x)$~~ ~~$\mathrm{Var}(x)$~~

$$m_{y\hat{y}} \underset{\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x}{=} \hat{\beta}\, m_{yx} \underset{\hat{\beta} = \frac{m_{xy}}{m_{xx}}}{=} \hat{\beta}^2 m_{xx} = m_{\hat{y}\hat{y}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\gamma}_2 = 1, \ \hat{\gamma}_1 = 0$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{m_{\hat{\hat{y}}\hat{\hat{y}}}}{m_{\hat{y}\hat{y}}} = 1 \quad \text{für } \hat{\hat{y}} := \hat{\gamma}_1 + \hat{y}\hat{\gamma}_2 = \hat{y}.$$

b) $y_t = \theta_1 + \hat{u}_t \theta_2 + w_t \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_1 = \bar{y} - \hat{\theta}_2 \overset{= 0}{\overline{\hat{u}_t}} = \bar{y}$

$\hat{\theta}_2 = \frac{m_{y\hat{u}}}{m_{yy}}$

$$m_{y\hat{u}} = \beta\, m_{x\hat{u}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_2 = 0$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{m_{\hat{\hat{y}}\hat{\hat{y}}}}{m_{\hat{y}\hat{y}}} \quad \text{für } \hat{\hat{y}} = \hat{\theta}_1 + \hat{u}_t \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 = \bar{y}$$

$$\hat{w} = y - \hat{\hat{y}} = y - \bar{y} \quad \Rightarrow \quad m_{\hat{w}\hat{w}} = m_{yy}.$$

$$= 1 - \frac{m_{\hat{w}\hat{w}}}{m_{\hat{y}\hat{y}}} = 0$$

3.4)

$$y_t = \alpha \cdot 1 + \beta x_t + u_t \quad \Leftrightarrow \quad y_t = 0 + \hat{y}_t \cdot 1 + \hat{u}_t \quad \text{~~Beste Fit~~}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t + \hat{u}_t & (2) \\ \hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_t = y_t - \hat{u}_t \end{cases}$$

a) $y_t = \gamma_1 + \hat{y}_t \gamma_2 + v_t$

$$= 1 \cdot 0 + \hat{y}_t \cdot 1 + \hat{u}_t$$

Ansatz

Aber ist das beste

Approx ? ✓ falls $\hat{u}_t \perp \hat{y}_t$, $\hat{u}_t \perp 1$ ... OK ist (2).

b) $y_t = \theta_1 + \hat{u}_t \theta_2 + w_t$

$$y_t = 1 \cdot 0 + \hat{u}_t \cdot 1 + \hat{y}_t$$

$$\cancel{= 1 \cdot \bar{\hat{y}} + \hat{u}_t \cdot 1 + (\hat{y}}$$

$$= 1 \cdot \bar{y} + \hat{u}_t \cdot 1 + (\hat{y}_t - \bar{y})$$

$\bar{\hat{y}} = \bar{y}$

$\bar{u} = 0$

$$= 1 \cdot \bar{y} + \hat{u}_t \cdot 1 + (\hat{y}_t - \bar{y})$$

$$= 1 \cdot \bar{y} + \hat{u}_t \cdot 1 + (\hat{y}_t - \bar{y}_t)$$

$$\Rightarrow y = \iota \bar{y} + \hat{u} \cdot 1 + (\hat{y} - \iota \bar{y})$$

ZZ:

$$\hat{u}'(\hat{y} - \iota\bar{y}) = \underbrace{\hat{u}'\hat{y}}_{0} - \underbrace{\hat{u}'\iota}_{\bar{\hat{u}} = 0}\bar{y} = 0 \quad ✓$$

$$\iota'(\hat{y} - \iota\bar{y}) = \iota'\hat{y} - \underbrace{\iota'\iota}_{T}\bar{y} = \iota'\hat{y} - \iota' y = 0$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\iota' y, \quad \bar{\hat{y}} = \bar{y}$$

wie in ursp. Modell!

a) $R^2_*(a) = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{(y-\iota\bar{y})'(y-\iota\bar{y})} = R^2_*$

b) $R^2_*(b) = 1 - \frac{(\hat{y}'-\iota\bar{y})'(\hat{y}'-\iota\bar{y})}{(y-\iota\bar{y})'(y-\iota\bar{y})} = 1 - \frac{-\hat{u}'\hat{u} + (y-\iota\bar{y})'(y-\iota\bar{y})}{(y-\iota\bar{y})'(y-\iota\bar{y})}$

$y - \iota\bar{y} = \hat{u} + (\hat{y} - \iota\bar{y})$ $\quad = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{(y-\iota\bar{y})'(y-\iota\bar{y})} = 1 - R^2_*$

$\perp$

gef. Werte Fehler (im Modell b)