2.1. Berechnen Sie den OLS (Kleinstquadrate-Schätzer) $\hat{\alpha}$ für das Regressionsmodell $y_t = \alpha + u_t$ und die entsprechende (minimale) Residuenquadratsumme $\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t - \hat{\alpha})^2$. Geben Sie auch eine Formel für das (nicht zentrierte) Bestimmtheitsmaß $R^2 = (\hat{y}'\hat{y}/(y'y))$ an.

2.2. Sei $X \in \mathbb{R}^{T\times K}$, $\imath = (1,1,\ldots,1)' \in \mathbb{R}^{T\times 1}$ und $\bar{X} = \frac{1}{T}\imath' X \in \mathbb{R}^{1\times K}$. Zeigen Sie, dass $(\imath, X)'(\imath, X) \in \mathbb{R}^{(K+1)\times(K+1)}$ dann und nur dann regulär ist, wenn $(X - \imath\bar{X})'(X - \imath\bar{X}) \in \mathbb{R}^{K\times K}$ regulär ist.

2.3. Beweisen Sie, dass das zentrierte Bestimmtheitsmaß R_*^2 im einfachen linearen Regressionsmodell gleich dem quadrierten empirischen Korrelations-Koeffizienten zwischen y und x ist.

$$R_*^2 = \frac{m_{yx}^2}{m_{yy}m_{xx}} = r_{yx}^2$$

2.4. Zeigen Sie, dass eine orthogonale Projektionsmatrix M nur die Eigenwerte $\lambda = 1$ und $\lambda = 0$ hat.

2.5. Wiederholen Sie die Definition und die wichtigsten Eigenschaften von positiv (semi-) definiten Matrizen. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie, dass $A'A$ positiv semidefinit ist. Wann ist das Produkt $A'A$ positiv definit? Zeigen Sie, dass jede Varianz-Kovarianz Matrix positiv semidefinit ist.

Ökonometrie UE

II. 1) Regressionsmodell: $y_t = \alpha + u_t$

$$y = \underset{X}{\iota}\alpha + u$$
$$\hat\alpha = (X'X)^{-1}X'y = (\iota'\iota)^{-1}\iota'y = \frac{1}{T}\sum y_t .$$

$$\rightarrow \sum_{t=1}^{T} u_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t-\alpha)^2 \rightarrow \min.$$

$$2\sum_{t=1}^{T}(y_t-\alpha)(-1) = 2\left(T\alpha - \sum_{t=1}^{T} y_t\right) = 0 \iff \hat\alpha = \bar y$$

$$\rightarrow \sum_{t=1}^{T}\hat u_t^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t-\hat\alpha)^2 = \sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar y)^2 = T\cdot m_{yy}$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{\hat y'\hat y}{y'y} = \frac{T\hat\alpha^2}{y'y} = \frac{T\bar y^2}{y'y} = \frac{\text{Stichprobenmittel}^2}{\text{2. Stichprobenmoment}} = \frac{\bar y^2}{\bar y^2 + \sum(\underbrace{y_t-\bar y}_{\hat u_t})^2}$$

$$\hat\sigma^2 = \frac{1}{T-1}\sum(y_t-\bar y)^2$$

2) $X \in \mathbb{R}^{T\times K}$, $\iota := (1,\dots,1)' \in \mathbb{R}^{T\times 1}$, $\bar X := \frac{1}{T}\iota' X \in \mathbb{R}^{1\times K}$

$$\frac{1}{T}(X-\iota\bar X)'(X-\iota\bar X) = \frac{1}{T}X'X - \underbrace{\bar X'\bar X}_{(\bar x_i \bar x_j)_{i,j=1}^{K}}$$

$$\frac{1}{T}(\iota,X)'(\iota,X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\iota'\iota & \frac{1}{T}\iota'X \\ \frac{1}{T}X'\iota & \frac{1}{T}X'X \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \bar X \\ \hline \bar X' & \frac{1}{T}X'X \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \bar X_1 & \dots & \bar X_K \\ \hline \bar X_1 & & & \\ \vdots & & \frac{1}{T}X'X & \\ \bar X_K & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\bar X_1) \\ \\ \cdot(-\bar X_K) \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \bar X_1 & \dots & \bar X_K \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \frac{1}{T}X'X - \bar X'\bar X & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \bar X \\ \hline 0 & \frac{1}{T}(X-\iota\bar X)'(X-\iota\bar X) \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Beh.; es gilt sogar $\det((\iota,X)'(\iota,X)) = \det((X-\iota\bar X)'(X-\iota\bar X))$

3) ZZ: $R_*^2 = r_{yx}^2$

$$\hat y_t = \hat\alpha + \hat\beta x_t \Rightarrow m_{\hat y\hat y} = \hat\beta^2 m_{xx} \underset{\hat\beta = \frac{m_{yx}}{m_{xx}}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{m_{yx}^2}{m_{xx}}$$

$$\Rightarrow R_*^2 = \frac{m_{\hat y\hat y}}{m_{yy}} = \frac{m_{yx}^2}{m_{xx}\, m_{yy}} = r_{xy}^2$$

$y = \iota\alpha + \underset{\in\mathbb{R}^{T\times K}}{X}\beta + u \quad \Rightarrow R_*^2 = \max\limits_{z\in \mathrm{col}(X)} r_{yz}^2$ ... multipler Korrelationskoeff.

4) ZZ: M orth. Proj.-Matrix $\Rightarrow \lambda \in \{0,1\} \quad \forall$ EW λ von M.

M erfüllt $M = M^*$, $M \cdot M = M$.

Sei λ EW von M und x EV zu λ, d.h. $Mx = \lambda x$

$$\lambda x'x = x'(\lambda x) = x'(Mx) = x' \underbrace{M'M}_{M} x = (Mx)'(Mx) = \lambda x' \lambda x = \lambda^2 \underbrace{x'x}_{\in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$.

5) $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

-) ZZ: $A'A$ pos. sem.-def., d.h. $x'A'Ax \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$

$$x'A'Ax = (Ax)'(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

-) Wenn pos. def.?

$\left(\cancel{x'A'Ax = \|Ax\|_2^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow A = 0}\right]$

$\Rightarrow A'A$ pos. def., d.h. $\|Ax\|_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow$ $\cancel{A \neq 0}$ Ker $A = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ rg $A = m$

-) $M_{xx} = \frac{1}{T}(X - \iota\bar{X})'(X - \iota\bar{X}) \Rightarrow$ pos. sem.-def.

$\Sigma \geq 0 \overset{?}{\Rightarrow} \Sigma = AA'$ (nicht eind.) $\quad \exists Q$ orth., Λ diag: $\Sigma = Q\Lambda Q' = (Q\sqrt{\Lambda})(\sqrt{\Lambda}'Q')$