Grundlagen der Ökonometrie UE 2010W — 109.012 Übungsblatt - 1

1.1. Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Wann existiert eine Lösung x? Welche Struktur hat die Lösungsmenge? Unter welchen Bedingungen ist die Lösung eindeutig?

1.2. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{col}(A)$ und $\ker(A')$ lineare Unterräume von $\mathbb{R}^m$ sind und, dass $\mathrm{col}(A) \perp \ker(A')$.

1.3. Beweisen Sie folgende Eigenschaften des empirischen Mittels und der empirischen Varianz, Kovarianz[1] und Korrelation. $x_t \in \mathbb{R}$, $y_t \in \mathbb{R}$, $t = 1, \ldots, T$ sind gegeben und $u_t = a + bx_t + cy_t$ und $v_t = d + ex_t + fy_t$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ sind transformierte Größen.

$$\bar{u} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_t = a + b\bar{x} + c\bar{y} \text{ und daher gilt } (u_t - \bar{u}) = b(x_t - \bar{x}) + c(y_t - \bar{y})$$

$$m_{uv} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(u_t - \bar{u})(v_t - \bar{v}) = be \cdot m_{xx} + (bf + ce)m_{xy} + cf \cdot m_{yy}$$

$$= \left(\frac{1}{T}\sum y_t x_t\right) - \bar{y}\bar{x}$$

$$m_{yx} := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t x_t - \bar{y}\bar{x}\right) \text{(Steiner'scher Verschiebungssatz)}$$

$$-1 \leq r_{yx} := \frac{m_{yx}}{\sqrt{m_{xx} m_{yy}}} \leq 1$$

Für den Fall $u_t = a + bx_t$, $v_t = d + fy_t$ (d.h. $c = e = 0$) und $b \neq 0$, $f \neq 0$ folgt

$$r_{uv} = \mathrm{sign}(bf) r_{xy}$$

Wann gilt $r_{yx} = 0$ bzw. $r_{yx}^2 = 1$?

[1] Beachten Sie, dass die empirischen Varianzen und Kovarianzen mit $1/T$ normiert werden (statt mit $1/(T-1)$).

$b \in col(A) \Leftrightarrow$

1.1) -) wenn $rg\, A = rg\,[A|b]$ (Kronecker-Capelli)

-) affiner Unterraum: $L = x_i + ker\, A$ wobei x_i ist Lösung des inh. Systems

-) wenn A regulär $\Rightarrow Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$.

1.2) -) $x_1, x_2 \in col(A)$

$A = (a_1, \dots, a_m)$

Seien ~~$(b_1, b_2, \dots, b_r)$~~ Basis von $col(A)$ ~~$(r = rg\, A)$~~

$\Rightarrow \exists!$ DS $x_1 = \sum_{k=1}^{m} a_k a_k$

$x_2 = \sum_{k=1}^{m} c_k a_k$ $\Rightarrow x_1 + \lambda x_2 = \sum_{k=1}^{m} (a_k + \lambda c_k) a_k \in [a_1, \dots a_m] = col(A)$.

-) $x_1, x_2 \in ker(A')$

d.h. $A' \cdot x_1 = 0$, $A' \cdot x_2 = 0$ $\Rightarrow A' \cdot (x_1 + \lambda x_2) = A' x_1 + \lambda A' x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + \lambda x_2 \in ker(A')$.

-) $col(A) \perp ker\, A'$ $\quad y'x = y'Ab = 0 \cdot b = b$.

$x \in col(A)$, $y \in ker\, A'$ ~~d.h. $x = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i$~~ $x = Ab$, $A'y = 0 \Leftrightarrow y'A = 0$ ~~$\Leftrightarrow y'a_i = 0\ \forall i$~~

~~$(A'y)'(Ax) \Rightarrow y'x = y' \sum b_i a_i = \sum b_i y' a_i = 0 \Rightarrow$ Beh.~~

1.3) -) $\bar{u} := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} u_t = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (a + b x_t + c y_t) = \frac{T a}{T} + b \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t + c \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t$

$= a + b\bar{x} + c\bar{y}$.

-) $u_t - \bar{u} = a + bx_t + cy_t - a - b\bar{x} - c\bar{y} = b(x_t - \bar{x}) + c(y_t - \bar{y})$

-) $m_{uv} := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (u_t - \bar{u})(v_t - \bar{v}) =$ ~~$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} [a + bx_t + cy_t] -$~~

$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} [b(x_t - \bar{x}) + c(y_t - \bar{y})] \cdot [e(x_t - \bar{x}) + f(y_t - \bar{y})]$

$= b \cdot e \cdot \frac{1}{T} \sum (x_t - \bar{x})^2 + (bf + ce) \frac{1}{T} \sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y}) + cf \frac{1}{T} \sum (y_t - \bar{y})^2$

$= b \cdot e \cdot m_{xx} + (bf + ce)\, m_{xy} + cf \cdot m_{yy}$

-) $m_{yx} = \frac{1}{T} \sum (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) = \frac{1}{T} \sum (y_t x_t - \bar{y} x_t - y_t \bar{x} + \bar{y}\bar{x})$

$= \frac{1}{T} \sum y_t x_t - \underbrace{\sum_t \left(\frac{1}{T} \sum_s y_s x_t + \frac{1}{T} \sum_s y_t x_s\right)}_{2 \cdot \frac{1}{T} \sum_s y_s \sum_t x_t = 2T\bar{y}\bar{x}} + \frac{1}{T} T \bar{y}\bar{x})$

$= \frac{1}{T} \sum (y_t x_t - \bar{y}\bar{x})$.

$\to$) $|m_{yx}| \le \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|y_t-\bar{y}|\,|x_t-\bar{x}| \le \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t-\bar{y})^2}\ \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}$

$= \sqrt{m_{yy}\cdot m_{xx}}$

$\Rightarrow \quad |r_{yx}| = \frac{|m_{yx}|}{\sqrt{m_{xx}\, m_{yy}}} \le 1$

$\to$) $r_{uv} = \frac{m_{uv}}{\sqrt{m_{uu}\ m_{vv}}} = \frac{be\, m_{xx} + \overbrace{(bf+ce)}^{bf} m_{xy} + \overbrace{cf \cdot m_{yy}}^{0}}{|b\, m_{xx}|\cdot|f\, m_{yy}|} = \frac{bf}{|bf|}\, r_{xy}$

$= \operatorname{sgn}(bf)\, r_{xy}.$

$b^2 m_{xx} + 2bc\, m_{xy} + c^2 m_{yy}$

$(b\, m_{xx} + c\, m_{yy})^2 = (b\, m_{xx})^2$

$r_{yx} = 0 \iff m_{yx} = 0$, also x, y unkorreliert.

$r_{yx}^2 = 1 \iff m_{yx}^2 = m_{xx}\cdot m_{yy}$

$\iff$

$$y_t = a + b x_t \qquad \bar{y} = a + b\bar{x} \qquad y_t - \bar{y} = b(x_t - \bar{x})$$

$$m_{yx}^2 = \frac{1}{T^2}\left(\sum (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})\right)^2 = \frac{1}{T}\left(\sum b(x_t-\bar{x})^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{T}\sum b(x_t - \bar{x}) \; \frac{1}{T}\sum (x_t - \bar{x})$$

$$\cancel{= b^2 \, m_{xx}^2}$$

$$\left(b \cdot \frac{1}{T}\sum (x_t - \bar{x})^2\right)^2 = b^2 m_{xx}^2 = m_{xx} \cdot m_{xy}.$$

$$\Rightarrow \quad m_{yy} = b \cdot m_{xx}$$

Dennis Teros – Hey Hey

Pavov Skelar

$$m_{xx} \cdot m_{yy} = \frac{1}{T}\sum (x_t - x)^2 \cdot \frac{1}{T}\sum (y_t - y)^2$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^2 \sum_s \sum_t (x_s - \bar{x})^2 \cdot (y_t - \bar{y})^2 = \left(\frac{1}{T}\right)^2 \left(\sum_t (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})\right)^2 = m_{xy}^2$$

$$\parallel$$

$$\left(\frac{1}{T}\right)^2 \sum_s \sum_t (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x})(y_s - \bar{y})(x_s - \bar{x})$$

$$\cancel{(x_s - \bar{x})^2 = (y_s - \bar{y})(x_s - \bar{x})}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \; y_s - \bar{y} = |x_s - \bar{x}|}$$

$$\cancel{(y_t - \bar{y})^2 = (y_t - \bar{y})(x_t - \bar{x}) \Rightarrow |y_t - \bar{y}| = x_t - \bar{x}}$$

Se s fest. x_s^2 $\quad 1 = $ fin $t = s$ $\quad \cancel{(x_s - \bar{x})^2 \cdot (y_t - \bar{y})^2 = (y_s - \bar{y})^2 (x_s - \bar{x})^2}$

$$\cancel{a \cdot b = b \cdot c \cdot d \cdot a}$$

$$(x_s - \bar{x}) \cdot (y_t - \bar{y}) = (x_t - \bar{x}) \cdot (y_s - \bar{y}) \qquad \forall s, t$$

$$\Rightarrow \quad (y_t - \bar{y}) = (x_t - \bar{x}) \cdot b \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \quad y_t = a + b x_t$$

$$y' A x = \underbrace{y' A}_{0} b = 0.$$