Beispielsammlung Prof. Kusolitsch

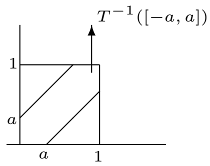
Inhaltsverzeichnis

1 Maße und Mengensysteme

1.1 Lebesgue-Borel-Maß

1. μ sei das zweidimensionale Lebesgue-Borel-Maß, eingeschränkt auf $\Omega := [0,1] \times [0,1]$, $T : \Omega \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $T(x,y) := x - y$, ferner sei $a > 0$.
   Berechnen Sie $\mu^T([-a,a])$!
   (Am einfachsten ist eine geometrische Lösung).

   Lösung:

$$\begin{aligned} \mu^T(A) &= \mu(T^{-1}(A)) = \lambda_2(\{(x,y) : \; x - y \in A\} \cap [0,1]^2) \\ \Rightarrow \quad \mu^T([-a,a]) &= \begin{cases} 1 - (1-a)^2 = (2-a)a & \text{für } 0 < a \leq 1 \\ 1 & \text{für } a > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 Sigma(X)-meßbar

1. Man bestimme $\sigma(X)$ für $X(\omega) = \omega^2$ auf $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$.
   Wann ist eine Funktion $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bezüglich $\sigma(X)$ meßbar?.
   Lg:
   $$\begin{array}{rcl} X^{-1}(\{0\}) & = & \{0\} \\ X^{-1}(\{1\}) & = & \{-1, 1\} \\ X^{-1}(\{4\}) & = & \{2\} \end{array}$$
   $$\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{2\}, \{-1, 1\}, \{0, 2\}, \{0, -1, 1\}, \{-1, 1, 2\}\}$$
   $Y \sim \sigma(X) \setminus \mathcal{B}$-mb $\Rightarrow Y^{-1}(\{Y(1)\}] \in \sigma(X)$, In $\sigma(X)$ enthält jede Menge, die 1 enthält, auch $-1 \Rightarrow -1 \in Y^{-1}(\{Y(1)\}) \Rightarrow Y(-1) = Y(1)$ bzw.: Y ist eine Funktion von X und wegen $X(-1) = X(1)$ gilt auch $Y(-1) = Y(1)$ $\square$

2. Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$
   Ist $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra? Wenn ja, ist $X(\omega) = \omega^2 - 5\omega$ $\mathfrak{S}/\mathcal{B}-$meßbar?
   Lg:
   $\mathfrak{S}$ ist eine σ-ALgebra.
   $$\begin{array}{lcllcl} X(1) & = & -4 & & & \\ X(2) & = & 4 - 10 & = & -6 \\ X(3) & = & 9 - 15 & = & -6 \\ X(4) & = & 16 - 20 & = & -4 \\ X^{-1}(\{-4\}) & = & \{1, 4\} \in \mathfrak{S} & & \\ X^{-1}(\{-6\}) & = & \{2, 3\} \in \mathfrak{S} & & \end{array}$$
   X ist $\mathfrak{S}$-mb.

3. Sei $\Omega = \mathbb{Z}$. Man bestimme $\sigma(X)$ für $X(\omega) = \omega^2$.
   Welche Funktionen Y sind $\sigma(X)$ meßbar?
   Lg:
   $$\sigma(X) = \{\bigcup_{n \in A} \{-n, n\}, A \subseteq \mathbb{N}_0\}$$
   $$Y(-n) = Y(n) \Longleftrightarrow Y \text{ ist } \sigma(X) - \text{meßbar.}$$

1.3 Äusseres Maß & Maßfunktionen

1. μ^* sei eine äußere Maßfunktion auf M. Dann gilt

$$\begin{aligned}&|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B)\\ &\forall A, B \in \mathfrak{B}(M) \text{ mit } \mu^*(A) < \infty, \mu^*(B) < \infty\end{aligned}$$

   Lösung:

$$\begin{aligned}
& A = (A - B) \cup (A \cap B) \subset (A\Delta B) \cup B\\
& B = (B - A) \cup (B \cap A) \subset (A\Delta B) \cup A\\
\Rightarrow\quad & \mu^*(A) \leq \mu^*(A\Delta B) + \mu^*(B)\\
& \mu^*(B) \leq \mu^*(A\Delta B) + \mu^*(A)\\
\Rightarrow\quad & \mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A\Delta B)\\
& \mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A\Delta B)\\
\Rightarrow\quad & |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\Delta B)
\end{aligned}$$

2. Man zeige, dass die folgende Mengenfunktionen äußere Maße sind und bestimme jeweils die σ- Algebra der μ^*-meßbaren Mengen.

   (a) $\Omega \neq \emptyset$ bel., $\mu^*(\emptyset) = 0, \quad \mu^*(A) = 1 \quad \forall A \neq \emptyset$

   (b) $\mathfrak{P}|\Omega| \geq 3, \quad \mu^*(\emptyset) = 0, \quad \mu^*(\Omega) = 2 \quad \mu^*(A) = 1$ sonst

   (c) $\Omega = \mathbb{R}, \quad \mu^*(A) := \begin{cases} 0, & |A| \leq \aleph_0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$

   Lg:

   (a)

$$\begin{aligned}
& \emptyset \neq A \neq \Omega\\
\Rightarrow\quad & \mu^*(\Omega) = 1 \geq \mu^*(A \cap \Omega) + \mu^*(\Omega \setminus A)\\
\Rightarrow\quad & \mathfrak{M} = \{\emptyset, \Omega\}
\end{aligned}$$

   (b) $\emptyset \neq A \neq \Omega$, suche $B : B \cap A \neq \emptyset,\ B \setminus A \neq \emptyset$

$$\begin{aligned}
& \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) = 2\\
& \mu^*(B) = 1\\
\Rightarrow\quad & A \notin \mathfrak{M}\\
\Rightarrow\quad & \mathfrak{M} = \{\emptyset, \Omega\}
\end{aligned}$$

(c) Beh: $\mathfrak{M} = \{A : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$

$$\begin{aligned}
& B \subseteq \Omega \ \wedge \ |B| \leq \aleph_0 \\
\Rightarrow \ & \mu^*(B) = 0 \ \wedge \ \mu^*(B \cap A) = 0 \ \wedge \ \mu^*(B \cap A^c) = 0 \\
& |B| > \aleph_0 \ \wedge \ |A| \leq \aleph_0 \\
\Rightarrow \ & \mu^*(B) = 1, \ \mu^*(B \setminus A) = 1 \ \wedge \ \mu^*(B \cap A) = 0 \\
\Rightarrow \ & A \in \mathfrak{M}
\end{aligned}$$

für $|A^c| \leq \aleph_0$ analog

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad & |A| > \aleph_0 \ \wedge \ |A^c| > \aleph_0 \\
\Rightarrow \quad & \mu^*(A) + \mu^*(A^c) = 2 \neq \mu^*(\Omega) = 1 \\
\Rightarrow \quad & A \notin \mathfrak{M}
\end{aligned}$$

3. Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω und sei

$$d(A, B) := \mu^*(A \Delta B) \quad \forall A, B \in \mathfrak{P}(\Omega).$$

Man zeige, dass gilt:

$$d(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{i=1}^{n} B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} d(A_i, B_i) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lg:
$n = 2:$
Beh:

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

Bew:

$$\begin{aligned}
& (A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) = \\
= \ & [(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)^c] \cup [(B_1 \cup B_2) \cap (A_1 \cup A_2)^c]
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen reicht es aus zu zeigne, dass

$$(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)^c \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

$$\begin{aligned}
& (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)^c \\
= \ & (A_1 \cap B_1^c \cap B_2^c) \cup (A_2 \cap B_1^c \cap B_2^c) \\
\subseteq \ & (A_1 \cap B_1^c) \cup (A_2 \cap B_2^c) \\
\subseteq \ & (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2) \qquad \Box
\end{aligned}$$

$n \to n+1:$

$$\begin{aligned} & d(\bigcup_1^{n+1} A_i, \bigcup_1^{n+1} B_i) \\ \leq\ & d(\bigcup_1^{n} A_i, \bigcup_1^{n} B_i) + d(A_{n+1}, B_{n+1}) \\ \leq\ & \text{(Ind-voraussetzung)} \\ \leq\ & \sum_{i=1}^{n} d(A_i, B_i) + d(A_{n+1}, B_{n+1}) \qquad \square \end{aligned}$$

4. Sei

$$\Omega := \mathbb{R}, \mathfrak{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$$
$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & |A| < \infty \\ 1, & |A| = \infty \end{cases}$$

Man zeige, dass μ ein Maß auf der Algebra $\mathfrak{A}$ ist und bestimme das von μ gebildete äußere Maß μ^*. Außerdem zeige man das System der μ^*-meßbaren Mengen an. Lg:
Sei
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,\ A \in \mathfrak{A},\ A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$$

1)
$$|A| < \infty \Rightarrow |A_n| < \infty\ \forall n \Rightarrow \mu(A) = \sum \mu(A_n) = 0$$

2)
$$|A| = \infty\ \wedge\ A \in \mathfrak{A} \Rightarrow |A^c| < \infty \Rightarrow |A| = |\mathbb{R} \setminus A^c| > \aleph_0$$

$$\begin{array}{cl} \text{angenommen} & |A_n| < \infty\ \forall n \\ \Rightarrow & |A| \leq \aleph_0 \\ \Rightarrow & \exists n : |A_n| = \infty \\ & A_n \in \mathfrak{A} \\ \Rightarrow & |A_n^c| < \infty \\ \Rightarrow & |A_n| > \aleph_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \text{angenommen} & \exists n \neq m : |A_m| = \infty,\ A_n \cap A_m = \emptyset \\ \Rightarrow & A_m \subseteq A_n^c \\ \Rightarrow & |A_n^c = \infty \text{ Wid zu } |A_n^c| < \infty \end{array}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
& |A_m| < \infty \quad \forall n \neq m \\
\Rightarrow \quad & 1 = \mu(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) = \mu(A_n) = 1 \\
\Rightarrow \quad & \mu \text{ ist ein Maß.}
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
& |A| \leq \aleph_0 \text{ o.E.d.A. } A = \{a_1, a_2, \dots\} \\
\Rightarrow \quad & A \subseteq \bigcup \{a_n\} \ \wedge \ \sum \mu(\{a_n\}) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \mu^*(A) = 0
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
& |A| > \aleph_0, \ A \subseteq \bigcup A_n, \ An \in \mathfrak{A} \\
\Rightarrow \quad & \exists\, n : |A_n| > \aleph_0 \\
\Rightarrow \quad & \sum \mu(A_k) \geq \mu(A_n) = 1
\end{aligned}$$

Andererseits

$$A \subseteq \Omega \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(\Omega) = 1$$

Somit

$$\mu^*(A) = 1$$

$$\begin{aligned}
& B \text{ bel., } |A| \leq \aleph_0 \\
\Rightarrow \quad & \mu^*(A \cap B) = 0 \text{ (siehe oben)} \\
\Rightarrow \quad & \mu^*(B) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(B \setminus A) \\
\Rightarrow \quad & A \in \mathfrak{M} \\
\Rightarrow \quad & \mathfrak{M} \supseteq \{A : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}
\end{aligned}$$

Sei nun

$$|A| > \aleph_0 \ \wedge \ |A^c| > \aleph_0 \Rightarrow \mu^*(\Omega) = 1 < \mu^*(A) + \mu^*(A^c) \Rightarrow A$$

nicht meßbar.
Somit

$$\mathfrak{M} = \{A \in \mathbb{R} : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$$

5. Ist μ^* ein äußeres Maß auf Ω und $\mathfrak{R}$ ein Ring über Ω, so ist μ^* auf $\mathfrak{R}$ σ-additiv, wenn μ^* additiv ist.
   Lg:
   Da μ^* äußeres Maß gilt allgemein:

$$\mu^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

Sei nun (A_n) disjunkte Folge aus $\mathfrak{R}$ mit $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{R}$ und sei μ^* additiv auf $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} & \mu^*(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n) \geq \mu^*(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) \quad \forall N \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad & \mu^*(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n) \geq \sum_{\mathbb{N}} \mu^*(A_n) \end{aligned}$$

Somit

$$\mu^*(\bigcup_{\mathbb{N}} A_n) = \sum_{\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$$

6. Sei $B := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ und (p_n) eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$. Auf dem Semiring der halboffenen Intervalle $(a, b]$ wird ein Maß definiert durch $\mu((a, b]) = \sum_{x_n \in (a,b]} p_n$. Man bestimme μ^* und die σ-Algebra der μ^*-meßbaren Mengen.
Lösung:
Sei $\delta(n, N) = \min\{|x_i - x_n| : i \leq N, i \neq n\}$

$$\begin{aligned} p_n & \leq \mu((x_n - \delta/2, x_n]) \\ & \leq \sum_{k>N, k \neq n} p_k + p_n \to_{N \to \infty} p_n \\ & \Rightarrow \mu^*(\{x_n\}) = p_n \quad \forall n \end{aligned}$$

$\{x_n\} \in \mathfrak{R}_\sigma(I)$: I... Intervalle $\Rightarrow \mu(B) = 1$

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{R}) & = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \mu((z, z+1)] \\ & = \sum_{z} \sum_{x_n \in (z, z+1]} p_n \\ & = \sum p_n = 1 \\ & \Rightarrow \mu(\mathbb{R} \setminus B) = 0 \\ & \Rightarrow \mathfrak{M} \text{ ist vollständig} \\ & \Rightarrow \text{alle Teilmengen von } \mathbb{R} \setminus B \text{ sind in } \mathfrak{M} \end{aligned}$$

$$|B| \leq \aleph_0 \Rightarrow \mathfrak{P}(B) \in \mathfrak{M}.$$

Somit alle Vereinigungen von Teilmengen von $\mathbb{R} \setminus B$ und von B aus $\mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{M} = \mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Dementsprechend gibt es kein Meßbarkeitsproblem bei diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

7. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, μ^* das zu μ gehörige äußere Maß und $B \subseteq \Omega$ beliebig, so ist μ^* eine Maßfunktion auf $\mathfrak{S} \cap B$.
Lösung:

$$\mu^*(\emptyset) = \mu^*(\emptyset \cap B) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad & C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \\
& C_n \cap C_m = \emptyset \quad \forall n \neq m, \\
& C, C_n \in \mathfrak{S} \cap B \\
\Rightarrow \quad & \exists\, A_n \in \mathfrak{S} : C_n = A_n \cap B \quad \forall n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_1 := A_1, \ldots, \hat{A}_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \quad \hat{A}_n \in \mathfrak{S} \\
& \hat{A}_n \cap \hat{A}_m = \emptyset \quad \forall n \neq m, \\
& C_n = \hat{A}_n \cap B, \ C = \bigcup \hat{A}_n \cap B
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\bigcup \hat{A}_n \in \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{M}.$$

Daher gilt für beliebiges B und daher auch C

$$\begin{aligned}
\mu^*(C) \quad & \geq \quad \mu^*(C \cap \bigcup_{n \subseteq N} \hat{A}_n) + \mu^*(C \cap (\bigcap_{n \subseteq N} \hat{A}_n^c)) \\
& \geq \quad \sum_{n=1}^{N} \mu^* \underbrace{(C \cap \hat{A}_n)}_{C_n}. \quad \forall N \in \mathbb{N} \\
& \Rightarrow \quad \mu^*(C) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(C_n)
\end{aligned}$$

Die Umkehrung ergibt sich aus der Subadditivität.

8. Ist μ^* eine äußere Maßfunktion und A μ^*-meßbar, so gilt für beliebiges B:

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cup B) \quad &= \quad \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) \\
&= \quad \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A) \\
\Rightarrow \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \quad &= \quad \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A) + \mu^*(A \cap B) \\
&= \quad \mu^*(A) + \mu^*(B)
\end{aligned}$$

9. Sei P ein Wert auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ über Ω und sei P^* das zugehörige äußere Maß. Weiters sei auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ ein inneres Maß P_* definiert durch $P_*(A) := 1 - P^*(A^c)$. Man zeige:

   (a) $P^*(A) = \inf\{P(B) : A \subseteq B,\ B \in \mathfrak{S} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A})\}$

   (b) $P_*(A) = \sup\{P(C) : C \subseteq A,\ C \in \mathfrak{S}\}$

   (c) A ist P^*-meßbar $\Rightarrow P^*(A) = P_*(A)$

   Lösung:

   (a) Sei $B_{n,m}$ aus $\mathfrak{A}$,

$$
\begin{aligned}
& A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n,m} \ \wedge \ \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B_{n,m}) \leq P^*(A) + \frac{1}{m} \\
\Rightarrow \quad & A \subseteq \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n,m}}_{\hat{B}_m \in \mathfrak{S}} \ \wedge \ P^*(A) \leq P^*(B) \\
& \leq \sum_n P(B_{n,m}) \leq P^*(A) + \frac{1}{m} \\
\Rightarrow \quad & A \subseteq B := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{B}_m \in \mathfrak{S} \ \wedge \ P^*(A) = P(B)
\end{aligned}
$$

   Da $\forall C \in \mathfrak{S}$ mit $C \supseteq A$ gilt

$$P^*(A) \leq P^*(C) = P(C),$$

   gilt:

$$P^*(A) = \inf\{P(B)_B \in \mathfrak{S},\ B \supseteq A\} \qquad \square$$

   (b) Wegen a) $\exists\ D \supseteq A^c,\ D \in \mathfrak{S}$ mit $P^*(A^c) = P(D)$.
   Somit gilt

$$D^c \in \mathfrak{S},\ D^c \subseteq A,\ P_*(A) = 1 - P(D) = P(D^c).$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Ist} & C \subseteq A,\ C \in \mathfrak{S} \\
\Rightarrow & A^c \subseteq C^c \\
\Rightarrow & P^*(A^c) \leq P(C^c) \\
\Rightarrow & P_*(A) = 1 - P^*(A^c) \geq 1 - P(C^c) = P(C), \\
\text{also} & P_*(A) = \sup\{P(C) : C \subseteq A\}
\end{array}
$$

   (c) $\Rightarrow$:

$$
\begin{array}{lrcl}
A \text{ messbar} \ \Rightarrow & 1 & = & P^*(\Omega) \\
 & & = & P^*(A \cap \Omega) + P^*(\Omega \setminus A) \\
 & & = & P^*(A) + P^*(A^c) \\
\Rightarrow & P^*(A) & = & 1 - P^*(A^c) = P_*(A)
\end{array}
$$

$\Leftarrow$: Sei

$$P_*(A) = P^*(A) \ \wedge \ \underline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$$

mit

$$\begin{aligned}
&\underline{A},\ \overline{A} \in \mathfrak{S} \ \wedge \ P_*(A) = P(\underline{A}), \\
&P(\overline{A}) = P^*(A) \Rightarrow P(\underline{A}) = P(\overline{A}) \ \wedge \ P(\overline{A} \setminus \underline{A}) = 0.
\end{aligned}$$

Sei

$$B \text{ bel.} \ \wedge \ C \supseteq B,\ C \in \mathfrak{S} \ \wedge \ P^*(B) = P(C)$$

zu zeigen:

$$P^*(B) \geq P^*(A \cap B) + P^*(B \cap A^c)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
A \cap B \subseteq \overline{A} \cap C, & \\
A^c \cap B \subseteq C \cap \underline{A}^c \quad & \Rightarrow \quad P^*(A \cap B) + P^*(B \cap A^c) \\
& \leq \quad P(\overline{A} \cap C) + P(C \cap \underline{A}^c)
\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned}
\underline{A} \subseteq \overline{A} \quad & \Rightarrow \quad \overline{A}^c \subseteq \underline{A}^c \\
& \Rightarrow \quad \underline{A}^c = \overline{A}^c \cup \underbrace{(\underline{A}^c \cap \overline{A})}_{\overline{A} \setminus \underline{A}} \\
& \Rightarrow \quad P(C \cap \underline{A}^c) \\
& \leq \quad P(C \cap \overline{A}^c) + \underbrace{P(C \cap (\overline{A} \setminus \underline{A}))}_{=0}
\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
P^*(A \cap B) + P^*(B \cap A^c) \quad & \leq \quad P(\overline{A} \cap C) + P(C \cap \overline{A}^c) \\
& = \quad P(C) = P^*(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_*(A) \quad & = \quad \sup\{P(C) : C \subseteq A,\ C \in \mathfrak{S}\} \\
P^*(A) \quad & = \quad \inf\{P(B) : A \subseteq B,\ B \in \mathfrak{S} \\
C \subseteq A \subseteq B \quad & \Rightarrow \quad P(C) \leq P(B) \\
& \Rightarrow \quad \sup\{P(C) : C \subseteq A\} \subseteq P(B) \ \forall \ B \supseteq A \\
& \Rightarrow \quad P_*(A) \leq \inf\{P(B) : B \supseteq A,\ B \in \mathfrak{S}\} = P^*(A)
\end{aligned}$$

10. Man zeige, dass für 2 Maße μ und ν auf einem Semiring $\mathfrak{T}$ über Ω gilt:

    (a) $(\mu + \nu)^* = \mu^* + \nu^*$

(b) $\mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$

(c) Wenn μ, ν σ-endlich $\Rightarrow \mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} = \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*}$

(d) Im Allgemeinen gilt in b) keine Gleichheit.

Lg:

(a)

$$\begin{aligned}
(\mu+\nu)^*(A) &= \inf\{\sum_n (\mu+\nu)(A_n) : A_n \in \mathfrak{T},\ A \subseteq \bigcup A_n\} \\
&\geq \inf\{\sum \mu(B_n) : \bigcup B_n \supseteq A,\ B_n \in \mathfrak{T}\} \\
&\quad + \inf\{\sum \nu(C_n) : \bigcup C_n \supseteq A,\ C_n \in \mathfrak{T}\} \\
&= \mu^*(A) + \nu^*(A)
\end{aligned}$$

Umgekehrt sei (A_n) eine disjunkte Überdeckung von A mit

$$\mu^*(A) \leq \sum \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon$$

und sei (B_m) eine disjunkte Überdeckung von A mit

$$\nu^*(A) \leq \sum \nu(B_m) \leq \nu^*(A) + \epsilon.$$

Dann ist $(A_n \cap B_m)$ eine disjunkte Überdeckung von A mit

$$\begin{aligned}
\sum_{n,m} \mu(A_n \cap B_m) &= \sum_n \mu(A_n) \ \wedge \ \sum_{n,m} \nu(A_n \cap B_) \\
&= \sum_m \nu(B_m) \\
&\Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) \\
&\leq \sum_{n,m} (\mu+\nu)(A_n \cap (B_m) \\
&\leq \mu^*(A) + \nu^*(A) + 2\epsilon
\end{aligned}$$

(b)

$$A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\nu^*},\ B \text{ bel.}, (\mu+\nu)^*(B) < \infty)$$

$$\begin{aligned}
(\mu+\nu)^*(B) &= \mu^*(B) + \nu^*(B) \\
&\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) + \\
&\quad + \nu^*(B \cap A) + \nu^*(B \cap A^c) \\
&= (\mu+\nu)^*(B \cap A) + (\mu+\nu)^*(B \cap A^c)
\end{aligned}$$

(c) Man kann Ω zerlegen

$$\begin{aligned} \omega &= \bigcup E_n : \mu(E_n) < \infty \ \wedge \ \nu(E_n) < \infty \ \forall n \\ &\Rightarrow (\mu+\nu)(E_n) < \infty \end{aligned}$$

Genügt daher Teilmengen von E_n zu betrachten:

$$A \subseteq E_n, \ A \in \mathfrak{M}^*_{(\mu+\nu)}$$

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{M}_{(\mu+\nu)^*} &\Rightarrow \exists \ \underline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A} : \ \underline{A}, \overline{A} \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{T}) : \\ (\mu+\nu) * (A) &= (\mu+\nu)(\overline{A}) = \mu(\overline{A}) + \nu(\overline{A}) = \mu(\underline{A}) + \nu(\underline{A}) \end{aligned}$$

Außerdem gilt $\mu^*(A) \leq \mu(\overline{A})$.
Daraus folgt $\nu^*(A) \leq \nu^*(\overline{A})$
Wegen $\mu^*(A) + \nu^*(A) = \mu(\overline{A}) + \nu(\overline{A})$,
denn $\mu^*(A) = \mu(\overline{A})$ und $\nu^*(A) = \nu(\overline{A})$.
Analog folgt aus $\mu^*(A) + \nu^*(A) = \mu((\underline{A}) + \nu(\underline{A})$
und $\mu(\underline{A}) \leq (A) \ \wedge \ \nu(\underline{A}) \leq \nu^*(A)$
auch $\mu^*(A) = \mu(\underline{A}) \ \wedge \ \nu^*(A) = \nu(A)$

$$\begin{aligned} \text{Somit} \quad & \exists \ \underline{A}, \overline{A} : \underline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A} \ \underline{A}, \\ & \overline{A} \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{T}) \ \wedge \ \mu^*(A) = \mu(\overline{A}) = \mu(\underline{A}) \\ \Rightarrow \quad & A \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \\ & \nu^*(A) = \nu(\overline{A}) = \nu(\underline{A}) \Rightarrow A \in \mathfrak{M}_{\nu^*} \qquad \Box \end{aligned}$$

(d) Sei $\Omega = (0,1]$, $\mu(A) = |A|$ Zählmaß, $\lambda(A)$ Lebesgue Maß
Klarerweise $\mathfrak{M}_\mu = p((0,1])$.
Außerdem $\mu + \nu = \mu$, denn

$$\begin{aligned} |A| < \infty &\Rightarrow \lambda(A) = 0 \Rightarrow (\mu+\nu)(A) = |A| = \mu(A) \\ |A| = \infty &\Rightarrow \mu(A) = (\mu+\nu)(A) = \infty \\ &\Rightarrow \mathfrak{M}_{\mu+\nu} = \mathfrak{M}_\mu \end{aligned}$$

Aber

$$\mathfrak{M}_{\mu^*} \cap \mathfrak{M}_{\lambda^*} = \mathfrak{R}_\sigma \neq p((p,1])$$

11. Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und für $A \subseteq \mathbb{N}$ sei

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & |A| < \infty \\ 2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Man zeige, dass μ^* ein äußeres Maß ist und bestimme $\mathfrak{M}_{\mu^*}$.
Lg:

$$\begin{aligned}
& A \subseteq \bigcup A_n : \\
& 1)\ |A| < \infty & \Rightarrow\ & \mu^*(A) = 1\ \wedge\ \sum \mu^*(A_n) \geq \\
& 2)\ |A| = \infty & \Rightarrow\ & \mu^*(A) = 2\ \wedge\ \exists n \neq m : A_n \neq \emptyset \\
& & \Rightarrow\ & \sum \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A_n) + \mu^*(A_m) \geq 2 \\
& & & \mu^* \text{ ist subadditiv.}
\end{aligned}$$

Beh.: $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$
$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}\ \wedge\ |A| < \infty$
Sei

$$\begin{aligned}
B = \mathbb{N} \quad & \Rightarrow\ \mu^*(B) = 2, \\
& \quad\ \mu^*(B \cap A) = \mu^*(A) = 1, \\
& \quad\ \mu^*(B \setminus A) = \mu^*(A^c) = 2 \\
& \Rightarrow\ \mu^*(B) < \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A) \\
& \Rightarrow\ A \notin \mathfrak{M} \\
\mathbb{N} \neq A\ \wedge\ |A| = \infty \quad & \Rightarrow\ \mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} \mu^*(\mathbb{N}) = 2, \mu^*(A \cap \mathbb{N}) = \mu^*(A) = 2 \\ \mu^*(\mathbb{N} \setminus A) \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu^*(\mathbb{N}) \leq \mu^*(A \cap N) + \mu^*(\mathbb{N} \setminus A) \Rightarrow A \notin \mathfrak{M}$$

12. Welche der folgenden Mengenfunktionen auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ sind äußere Maße?

    (a)
    $$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset; \end{cases}$$

    (b)
    $$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ überabzählbar unendlich;} \end{cases}$$

    (c)
    $$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ unendlich;} \end{cases}$$

    (d) Es sei $\Omega = \mathbb{R}$.
    $$\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ beschränkt,} \\ 1, & \text{falls } A \text{ nicht beschränkt.} \end{cases}$$

(e) Ω sei unendlich. $\mu^*(A) := \frac{n}{(n+1)}$, falls $\#A = n$ und $\mu^*(A) := 1$, falls $\#A = \infty$.
(„$\#A$" bezeichnet die Anzahl der Elemente von $A \subseteq \Omega$).

Lg:

(a) $\mu^* \geq 0,\ \mu^*(\emptyset) = 0$, Isotonie klar.
(A_k) geg.:

$$\begin{array}{lll} \text{1.Fall:} & A_k = \emptyset\ \forall k & \Rightarrow \bigcup A_k = \emptyset \\ & & \Rightarrow \mu^*(\bigcup A_k) = 0 = \sum \mu^*(A-k) \\ \text{2.Fall:} & \exists k_0 : A_{k_0} \neq \emptyset & \Rightarrow \bigcup A_k \neq \emptyset,\ \mu^*(\bigcup A_k) = 1 \end{array}$$

JA: $\mu^*(A_{k_0}) \leq \sum \mu^*(A_k)$

(b) Bed. 1)-3) klar!
$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.
Falls $\exists\ k : |A_k| > a \Rightarrow |\bigcup_k A_k| > a$
JA: $\Rightarrow$ Sub-σ-add.

(c) Bed. 1)-3) klar
Falls $|\Omega| < \infty : \mu^* \equiv 0$ trivial JA
Falls $|\Omega| = \infty \Rightarrow \exists A \subseteq \Omega : |A| = a$
$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\};\ A_n := \{x_n\}$
NEIN $\Rightarrow \mu^*(A) = 1$ aber $\sum \mu^*(A_n) = 0$ nicht sub-σ-add.

(d) Bed. 1)-3) gilt
$\mu^*([0, \infty)) = 1$
Aber $[0, \infty) \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty}[n-1, n),\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*([n-1, n)) = 0$
NEIN nicht sub-σ-add.

(e) $\mu^*(\emptyset) = 0$

$$\begin{array}{lll} A \subseteq B & \Rightarrow & |A| \subseteq |B| \\ & \Rightarrow & \dfrac{|A|}{|A|+1} \leq \dfrac{|B|}{|B|+1} \\ & & \left(\text{da } \dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+1}{x+2}} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+1} < 1\right) \\ & \Rightarrow & \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \end{array}$$

def: $a := |\bigcup A_n|,\ a_n := |A_n|,\ A_n \neq \emptyset \Rightarrow \mu^*(A_n) \geq \frac{1}{2}$
1)

$$\begin{array}{lll} a = \infty & \Rightarrow & \exists\ (n_i) : A_n \neq \emptyset \\ & \Rightarrow & \displaystyle\sum_n \mu^*(A_n) \geq \sum_i \mu^*(A_{ni}) \geq \frac{1}{2}\infty = \infty \end{array}$$

2)

$$
\begin{aligned}
a < \infty : a \le \sum_n a_n \quad &\Rightarrow \quad \mu^*(\bigcup A_n) \\
&\le \quad \frac{\sum_n a_n}{\sum_n a_n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(\sum a_n) + 1} \\
&\le \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + 1} = \sum \mu^*(A_n)
\end{aligned}
$$

13. Ist μ^* eine äußere Maßfunktion auf eine Menge Ω und (A_n) eine Folge von Teilmengen von Ω mit $A_n \nearrow \Omega$, so ist $A \subseteq \Omega$ μ^*-meßbar, wenn es einen Index $N \subseteq \mathbb{N}$ gibt, sodass $A \cap A_n$ μ^*-meßbar $\forall n \ge N$. Lg:

$$
\begin{aligned}
A_n \nearrow \Omega \quad &\Rightarrow \quad \bigcup_{n \ge N} (A \cap A_n) = A \\
(A \cap A_n) \in \mathfrak{M} \; \forall n \quad &\ge \quad N \; \wedge \; \mathfrak{M} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \\
&\Rightarrow \quad A = \bigcup_{n \ge N} (A \cap A_n) \in \mathfrak{M}
\end{aligned}
$$

14. Ist μ^* ein äußeres Maß auf Ω, so gilt für bel. Mengen A, B, C

$$\mu^*(A \Delta C) \le \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B \Delta C)$$

Lg:

$$
\begin{aligned}
A \Delta C \quad &= \quad (A \cap C^c) \cup (C \cap A^c) \\
&\subseteq \quad (A \Delta B) \cup (B \Delta C),
\end{aligned}
$$

denn betrachtet man $A \cap C^c$, so gilt:

$$
\begin{aligned}
A \cap C^c \quad &= \quad (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \\
&\subseteq \quad (B \cap C^c) \cup (A \cap B^c) \\
&\subseteq \quad (B \Delta C) \cup (A \Delta B).
\end{aligned}
$$

Aus Symmetriegründen gilt analog

$$A^c \cap C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

Der Rest folgt aus der Subadditivität von μ^*.

15. $(\mu_i^*)_{i \in I}$ sei eine Familie äußerer Maße auf Ω. Dann ist auch $\mu^* := \sup_{i \in I} \mu_i^*$ ein äußeres Maß.

Lg:
$\mu^* := \sup_{i \in I} \mu^*$:

1) $\mu^* \ge 0$

2) $\mu^*(\emptyset) = 0$ klar

3)

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow \mu_i^*(A) \leq \mu_i^*(B) \leq \mu^*(B) \ \forall i \in I \\ &\Rightarrow \mu^*(A) = \sup \mu_i^*(A) \leq \mu^*(B) \end{aligned}$$

4) $\mathfrak{S}_n$,

$$\begin{array}{rlclcl} & A & \subseteq & \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k & & \\ \Rightarrow & \mu_i^*(A) & \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \mu_i^*(A_k) & \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \ \forall i \\ \Rightarrow & \mu^*(A) & \leq & \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) & & \end{array}$$

16. Es sei $\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathfrak{M} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$. Welche Struktur hat $\mathfrak{M}$? Sei ferner $\mu(\emptyset) = \mu(\{a\}) = 0$, $\mu(\{b, c\}) = \mu(\Omega) = 1$. Ist μ ein Prämaß? Bestimmen Sei ggf. ein durch μ bestimmtes äußeres Maß μ^*, das μ fortsetzt!

    Lösung:
    $\mathfrak{M}$ ist σ-Algebra
    μ ist Prämaß
    $\mu^*(A) = \inf\{\sum \mu(A_i) : \bigcup A_i \supseteq A\}$

	A	Überdeckung	$\mu^*(A)$
$\Rightarrow$			
	$\{b\}$	$\{b, c\}$	1
	$\{c\}$	$\{b, c\}$	1
	$\{a, b\}$	$\{a\}, \{b, c\}$	1
	$\{b, c\}$	$\{a\}, \{b, c\}$	1
	ansonsten		$\mu(A)$

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 0, & A = \{a\} \\ 1, & \text{sonst } (A \neq \emptyset, \{a\} \notin A) \end{cases}$$

17. Es sei $(M, \mathfrak{M})$ ein Maßraum, μ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Maßfunktion und (a_n) eine Folge nichtnegativer reeler Zahlen. Dann definiert $\mu(A) := \sum_{\mathbb{N}} \alpha_n \mu_n(A) \ \forall A \in \mathfrak{A}$ eine Maßfunktion μ über $(M, \mathfrak{M})$.
    Lg:

1) $\mu \geq 0$

2) $\mu(\emptyset) = \sum_{\mathbb{N}} \alpha_n \mu_n(\emptyset) = \sum \alpha_n \cdot 0 = 0$

3) (A_k) pwf, $A_k \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} & \mu(\textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \\ = & \textstyle\sum_{\mathbb{N}} \alpha_n \mu_n(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \\ = & \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_n(A_k) \\ = & \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mu_n(A_k) \\ = & \textstyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \end{aligned}$$

$\square$

1.4 Inhalt & (σ-)Additivität

1. Es sei $\Omega := [0,1), \mathfrak{A} := \{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}) : i = 0, \ldots, 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$, $\mu(\emptyset) := 0,\ \mu([a,b)) := b - a$, falls $b < 1$ und $:= b - a + 1$, falls $b = 1$.
   Welche Struktur hat $\mathfrak{A}$? Ist μ ein Inhalt? Ist μ σ-additiv?
   Lg:
   $\mathfrak{A}$ ist Halbring

   1) $\emptyset \in \mathfrak{A}$
   2) $A := [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}),\ B := [\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}),\ n \le m$
      $A \cap B = [\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m})$ falls $A \cap B \neq \emptyset$
   3) $B \subseteq A$ (gilt nur, wenn $n \le m$!)

$$\begin{aligned}
\tfrac{i}{2^n} &= \frac{i \cdot 2^{m-n}}{2^m}, \\
\tfrac{i+1}{2^n} &= \frac{i \cdot 2^{m-n} + 2^{m-n}}{2^m} \\
\Rightarrow \quad A \setminus B &= \sum_{\alpha=0}^{j-2^{m-n}\cdot i-1} [\frac{i \cdot 2^{m-n} + \alpha}{2^m}, \frac{i \cdot 2^{m-n} + \alpha + 1}{2^m}) \\
&+ \sum_{\beta=0}^{2^{m-n}(i+1)-j-2} [\frac{j+1+\beta}{2^m}, \frac{j+2+\beta}{2^m}) \qquad \square
\end{aligned}$$

Aber: $\mathfrak{A}$ Halbalgebra ($[0,1) \in \mathfrak{A}!$), kein Ring: $[0, \frac{1}{2}) \setminus [\frac{1}{8}, \frac{2}{8}) \notin \mathfrak{A}$

Lg.: μ Inhalt
$\mu \ge 0,\ \mu(\emptyset) = 0$ klar.
$A = [a_1, b_1),\ B = [a_2, b_2),\ A + B \in \mathfrak{A} \Rightarrow$ (o.B.d.A.: $b_1 \le a_2$)

$$\begin{aligned}
b_1 = a_2 : \quad & A + B = [a_1, b_2) \\
b_2 = 1 : \quad & \mu(A) + \mu(B) \\
&= \mu([a_1, b_1)) + \mu([a_2, b_2)) \\
&= b_1 - a_1 + b_2 - a_2 + 1 \\
&= b_2 - a_1 + 1 \\
&= \mu(A + B)
\end{aligned}$$

$b_2 < 1$ klar
$[\frac{1}{2}, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) + [\frac{3}{4}, \frac{7}{8}) + \ldots$
Aber $\mu([\frac{1}{2}, 1)) = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \mu([1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}})) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

Nicht σ-additiv!

2. Kann ein Inhalt auf einem nichtleeren Mengensystem $\mathfrak{C}$ im Allgemeinen zu einem Inhalt auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ erweitert werden, wenn $\mathfrak{C}$ kein Semiring ist?
Lg:
Nein!
Gegenbsp.: $\Omega = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathfrak{C} & = & \{ & \{1\}, & \{3\}, & \{1,2\}, & \{2,3\}, & \emptyset & \} \\ \mu & = & (& 0, & 0, & 1, & 2, & 0 &) \end{array}$$

$\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \Omega\} = \mathfrak{P}(\Omega)$

Aber aus $\begin{array}{l} \mu(\{2\}) = \mu(\{1,2\}) - \mu(\{1\}) = 1 \\ \mu(\{2\}) = \mu(\{2,3\}) - \mu(\{3\}) = 2 \end{array} \rightarrow$ Widerspruch!!!

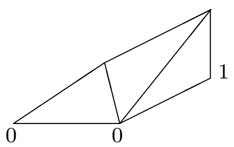
3. Auf dem Mengensystem $\mathfrak{C} := \{(a,b] \times (0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{(0,1] \times (a,b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ auf $\Omega = (0,1]^2$ ist die Mengenfunktion μ definiert durch $\mu((a,b] \times (0,1]) = \mu((0,1] \times (a,b]) = b - a$.

   (a) Ist $\mathfrak{C}$ eine Semiring?
   (b) Ist μ additiv auf $\mathfrak{C}$
   (c) Ist die Fortsetzung von μ auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ eindeutig?

   Lösung:
   kein Halbring:
   $\left.\begin{array}{l} A = (a_1, b_1] \times (0,1] \\ B = (0,1] \times (a_2, b_2] \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \notin \mathfrak{H}$
   Fortsetzungen:
   $F(x,y) := \mu((0,x] \times (0,y])$

   1) $F(x,y) := \begin{cases} x + y, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

   2) $F(x,y) := \begin{cases} x + y - 1, & 0 \leq x, y \leq 1,\ y \geq 1 - x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



4. Jordansche Gleichung: Ist μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$, sind $A_1, \dots, A_n$ beliebige Mengen aus $\mathfrak{R}$ und ist $C_{[m]}$ die Menge aller $w \in A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, die in genau m der Mengen $A_1, \dots, A_n$ liegen, so zeige man, dass $C_{[m]} \in \mathfrak{R}$ und dass gilt

$$\mu(C_{[m]}) = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} S_k$$

mit $S_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mu(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$.
Hinweis: Sei $A_i^\epsilon := \begin{cases} A_i, & \epsilon = 1 \\ A \setminus A_i, & \epsilon = 0. \end{cases}$
Man betrachte das System der Durchschnitte $\vartheta_l = \{\bigcap_{i=1}^n A_i^{\epsilon_i} : \epsilon_i \in \{0,1\}\ \forall i = 1, \dots, n,\ \sum_{i=1}^n \epsilon_i = l\}$ und überlege, ob wie folgt $D \in \vartheta_l$ auf beiden Seiten der obigen Gleichung vorkommt, je nachdem ob $l < m, l = m, l > m$.
Lg:
Bew: Offensichtlich gilt: $C_{[m]} = \bigcup_{D \in \vartheta_m} D$.
Wegen $|\vartheta_l| < \infty\ \wedge\ D \in \mathfrak{R} \forall D \in \vartheta_l\ \forall l$, ist damit klar, dass $C_{[m]} \in \mathfrak{R}$.
$D \in \vartheta_l, l < m$: D kann weder in $C_{[m]}$ noch in einer der Summen S_k vorkommen, da diese alle Durchschnitt von mehr als l Mengen A_i beinhalten.
$l = m : C_{[m]} = \bigcup_{D \in \vartheta_m} D\ D_1, D_2 \in \vartheta_m \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow \mu(C_{[m]}) = \sum_{D \in \vartheta_m} \mu(D)$
Auf der rechten Seite kommt D nur im konkreten Durchschnitt $A_{i_1} \cap A_{i_m}$ mit $\epsilon_{i_j}\ j = 1, \dots, m$ vor.
Somit kommt jedes D auf beiden Seiten genau einmal vor.
Sei $l > m : D \in D_l$ kommt in $C_{[m]}$ nicht vor.
Auf der rechten Seite gilt

$$D \subseteq A_{j_1} \cap A_{j_k} \Rightarrow \{i_1, \dots, i_l\} \supseteq \{j_1, \dots, j_n\}$$

Man kann dann $\{j_1, \dots, j : k\}$ auf $\binom{l}{k}$ Arten aus $\{i_1, \dots, i_l\}$ auswählen.
Somit kommt $\mu(D)$ rechts $N = \sum_{k=m}^{l} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} \binom{l}{k} -$ mal vor.
Nun gilt:

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{k=m}^{l}(-1)^{k-m}\frac{k!}{m!(k-m)!}\cdot\frac{l!}{k!(l-k)!}\\
&= \frac{l!}{m!(l-m)!}\sum_{k=m}^{l}(-1)^{k-m}\frac{(l-m)!}{(k-m)!(l-m-(k-m))!}\\
&= \binom{l}{m}\sum_{j=0}^{l-m}(-1)^{j}\binom{l-m}{j}\\
&= \binom{l}{m}(1-1)^{-m}\\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

5. Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen des vorigen Bsps. zeige man, dass für die Mengen $C_{(m)}$ der Punkte die mindestens m der A_i vorkommen gilt

$$\mu(C_{(m)}) = \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k-1}{m-1}S_k.$$

Daraus folgt mit $m = 1$ sofort das verallgemeinerte Additionstheorem:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k.$$

Hinweis: $C_{[n]} = C_{(n)},\ C_{[m]} = C_{(m+1)} \cup C_{[m]}$ Lg:
Bew:

$$C_{(n)} = C_{[n]} = \binom{n}{n}S_n = S_n\binom{n-1}{n-1} \quad \Rightarrow \quad m+1 \to m!$$

(richtig für $m = n$)

$C_{(m)} = C_{(m+1)} \cup C_{[m]}$
$C_{(m+1)} \cap C_{[m]} = \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mu(C_{(m)}) &= \textstyle\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-m-1}\binom{k-1}{m}S_k + \sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}S_k\\
&= \textstyle\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-m}S_k\,\underbrace{[\binom{k}{m}-\binom{k-1}{m}]}_{\binom{k-1}{m-1}}+\underbrace{\binom{m}{m}}_{\binom{m-1}{m-1}}S_m\\
&= \textstyle\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{k-1}{m-1}S_k \qquad \square
\end{aligned}$$

Beh: $\underbrace{\sum_{k=m}^{l}(-1)^{k-m}\binom{k-1}{m-1}\binom{l}{k}}_{C_m} = 1 \quad l \geq n$

Bew: vollst. Induktion: $m = l : \binom{l-1}{k-1}\binom{l}{l} = 1$

$n+1 \to m:$

$$
\begin{aligned}
C_m &= \textstyle\sum_{k=m}^{l}(-1)^{k-m}\binom{k-1}{m-1}\binom{l}{k} \\
&= \underbrace{\binom{m-1}{m-1}\binom{l}{m}}_{\binom{m}{m}\binom{l}{m}} + \textstyle\sum_{k=m+1}^{l}(-1)^{k-m}[\binom{k}{m}-\binom{k-1}{m}]\binom{l}{k} \\
&= \underbrace{\sum_{k=m}^{l}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{l}{k}}_{\binom{l}{m}\sum_{l=n}^{l}(-1)^{k-m}\binom{l-m}{k-m}=\binom{l}{m}\sum_{j=0}^{l-m}(-1)^{j}\binom{l-m}{j}=(1-1)^{lm}=0} \\
&+ \textstyle\sum_{k=m+1}^{l}(-1)^{k-(m+1)}\binom{k-1}{m+1-1}\binom{l}{k} \\
&= C_{m+1} \\
&= 1 \qquad \square
\end{aligned}
$$

6. Ungleichung von Bonferoni: Ist μ ein endlicher Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und sind $A_1, \ldots, A_n$ beliebige Mengen aus $\mathfrak{R}$, so gilt

$$(-1)^k \sum_{j=0}^{k}(-1)^j S_j \geq 0, \quad k = 0, \ldots, n \tag{1}$$

mit $S_o := \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ und $S_j = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n} \mu(A_{i_j} \cap \cdots \cap A_{i_j})$
Lg:
$A := \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \vartheta$ definiert wie bei Jordan-Bsp.
$A = \bigcup_{l=1}^{n} \bigcup_{D \in \vartheta_l} D$
Ist $D \in \vartheta_l$, so liegt D in keinem Durchschnitt $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}$ mit $j > l$
(1) reduziert sich daher für $D \in \vartheta_l$ auf

$$(-1)^k \sum_{j=0}^{k \wedge l}(-1)^j \binom{l}{j} \mu(D) \geq 0$$

Brauche also nur $(-1)^k \sum_{j=0}^{k \wedge l}(-1)^j \binom{l}{j}$ zu betrachten.
Für $j \leq \frac{l}{2}$ gilt $\binom{l}{j-1} \leq \binom{l}{j}$.
Sei $\sigma_k := \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{l}{j}$.
$k = 2u,\ k \leq \frac{l}{2} : \sigma_k = 1 + \underbrace{[-\binom{l}{1} + \binom{l}{2}]}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{[-\binom{l}{2u-1} + \binom{l}{2u}]}_{\geq 0} \geq$
l
$k = 2u{+}1,\ k \leq \frac{l}{2} : \sigma_k = \underbrace{[1 - \binom{l}{1}]}_{\leq 0} + \underbrace{[-\binom{l}{2} + \binom{l}{3}]}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{[-\binom{l}{2u} + \binom{l}{2u+1}]}_{\leq 0} \leq$
l
Wegen $\sigma_l = (1-1)^l = 0$ und der Symmetrie der Binomialkoeffizienten gilt: $0 = \sigma_l = \sigma_k + (-1)^l \sigma_{l-k-1}$.

Ist l gerade, $k \leq \frac{l}{2}$ gerade $\Rightarrow \sigma_k \geq 0 \ \wedge \ l-k-1$ ist ungerade.
$l-k-1 \geq 0$
Für k ungerade analog.

7. Ist μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und (A_n) eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathfrak{R}$, deren Vereinigung auch in $\mathfrak{R}$ liegt, so gilt

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Lg:
$\mu(\bigcup A_n) = \infty$ trivial
Sei $\mu(A) < \infty$ mit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
$A \supseteq \bigcup_{n=1}^{N} A_n \quad \forall N \in \mathbb{N}$
Aus der Monotonie und der Additivität folgt

$$\mu(A) \geq \mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

8. Gegeben sei der Meßraum $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ und
$\mu(A) := \begin{cases} \sum_{n\in A} a_n, & \text{falls } A \text{ endliche Teilmenge von } \mathbb{N} \text{ ist,} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendliche Teilmenge von } \mathbb{N} \text{ ist;} \end{cases}$
Dabei sei $\sum a_n$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeler Zahlen.
Ist μ ein Inhalt? Ist μ ein Maß?
Lg:

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $A, B \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \ A \cap B = \emptyset$
   i. A, B endlich $\Rightarrow$
   $\mu(A \cup B) = \sum_{n\in A\cup B} a_n = \sum_{n\in A} a_n + \sum_{n\in B} a_n = \mu(A) + \mu(B)$
   ii. A, B unendlich $\Rightarrow A \cup B$ unendlich
   $\mu(A) + \mu(B) = \infty = \mu(A \cup B)$
   iii. A endlich, B unendlich $\Rightarrow A \cup B$ unendlich
   $\mu(A \cup B) = \infty = \mu(A) + \mu(B)$

Lg. μ ist nicht σ-additiv:
$A_n := \{n\}$: Angenommen μ wäre σ-additiv
$$\left.\begin{array}{r} \mu(\mathbb{N}) = \infty \\ \infty > \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) = \mu(\mathbb{N}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

9. $(\mu_i)_{i\in I}$ sei eine Familie von Inhalten auf einem Ring über Ω. Es gelte: $\forall i,j \in I\ \exists l \in I : \mu_i \le \mu_l,\ \mu_j \le \mu_l$ (d.h., die Familie ist nach oben gerichtet).
$$\mu(A) := \sup \mu_l(A) \quad \forall A \in \mathfrak{R}$$
Dann ist auch μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$.
Sind die μ_i sogar Prämaße, dann ist auch μ ein Prämaß. Lg:
Beh: μ ist ein Inhalt

   1) $\mu(A) \ge 0$ klar!
   2) $\mu(\emptyset) = 0$ klar!
   3) $A \subseteq B \Rightarrow \mu_i(A) \le \mu_i(B) \quad \forall i \in I \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$
   4) $A, B \in \mathfrak{R},\ A \cap B = \emptyset$
   $\forall \epsilon > 0 \quad \exists i, j \in I :$
   $\mu_i(A) \le \mu(A) \le \mu_i(A) + \frac{\epsilon}{2}$
   $\mu_j(B) \le \mu(B) \le \mu_j(B) + \frac{\epsilon}{2}$
   $\exists l \in I : \quad \mu_i \le \mu_l,\ \mu_j \le \mu_l \Rightarrow$
   $\mu_l(A) \le \mu(A) \le \mu_l(A) + \frac{\epsilon}{2}$
   $\underline{\mu_l(B) \le \mu(B) \le \mu_l(B) + \frac{\epsilon}{2}}$
   $\mu_l(A+B) \le \mu(A) + \mu(B) \le \mu_l(A+B) + \epsilon$
   $\underbrace{\Rightarrow}_{\sup_l} \mu(A+B) \le \mu(A) + \mu(B) \le \mu(A+B) + \epsilon$
   $\epsilon \searrow 0$ gilt Gleichheit $\square$

Beh: μ_i Prämaße $\Rightarrow$ μ Prämaß.
Zeige Stetigkeit von unten.
$$\begin{aligned} & A_n \nearrow A \Rightarrow \mu_i(A_n) \nearrow \mu_i(A) \quad \forall i \in I \\ & \forall k < \mu(A) \quad \exists i_k : \mu_{i_k}(A) > k \\ \Rightarrow\ & \exists\, n_o : \mu_{i_k}(A_n) > k \quad \forall n \ge n_0(k) \\ \Rightarrow\ & \mu(A_n) > k \quad \forall\, n \ge n_0(k) \\ \Rightarrow\ & \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \ge \mu(A) \end{aligned}$$

$$\mu(A_n) \le \mu(A) \forall\, n \Rightarrow \underline{\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \le \mu(A)} \text{ klar!}$$

10. Sei $\Omega \ne \emptyset$ beliebig.
$\zeta(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich,} \end{cases} \quad \forall A \subseteq \Omega$
Dann ist ζ ein Maß auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ (ζ heißt Zählmaß auf Ω)
Unter welchen Bedingungen ist ζ σ-endlich?
Lg:
Maßeigenschaften klar!

ζ σ-endlich $\Leftrightarrow |\Omega| \le a$ (abzählbar)

11. Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}) := (\{-2,-1,0,1,2\}, \mathfrak{P}(\{-2,-1,0,1,2\})$. Für jedes $A \subseteq \Omega$ werde $\mu(A) := \sum_{n\in A} n$ ($= 0$, falls $A = \emptyset$) definiert.
Ist μ eine signierte Mengenfunktion? Ist μ additiv?
Ist die Mengenfunktion $A \mapsto \nu(A) := \max(\mu(A), 0)$ ebenfalls additiv?
Lg:
μ ist trivialerweise Mengenfunktion (endlich).

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset \;\;&\Rightarrow\;\; \mu(A \cup B) \\ &= \;\; \sum_{n\in A\cup B} n = \sum_{n\in A} n + \sum_{n\in B} n \\ &= \;\; \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

$\nu = \mu \vee 0$ ist Mengenfunktion, aber nicht additiv:

$$\begin{array}{llll} A := \{-2,-1\} & \Rightarrow & \nu(A) = -3 \vee 0 & = 0 \\ B := \{1,2\} & \Rightarrow & \nu(B) = 3 \vee 0 & = 3 \\ A \cup B = \{-2,-1,1,,2\} & \Rightarrow & \nu(A \cup B) = 0 \vee 0 & = 0 \end{array}$$

12. Ist Ω abzählbar, $\mathfrak{A} = \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \;\vee\; |A^c| < \infty\}$ und

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & |A| < \infty \\ 1, & |A^c| < \infty \end{cases}$$

so zeige man, dass μ additiv aber nicht σ-additiv ist und, dass eine Folge (A_n) aus $\mathfrak{A}$ existiert mit $A_n \nearrow \Omega$ und $\mu(A_n) = 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$.

Lg:
o.E.d.A. $\Omega = \mathbb{N}$
$A_n := \{1, \ldots, n\},\; A_n \nearrow \Omega,$
$\mu(A_n) = 0,\; \mu(\Omega) = 1$
$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\},\; \mu(\Omega) = 1 \ne \sum \mu(\{n\}) = 0 \Rightarrow \mu$ nicht σ-additiv.
$A, B \in \mathfrak{A},\; A \cap B = \emptyset$

$$\begin{aligned} |A| < \infty \;\wedge\; |B| < \infty \;\;&\Rightarrow\;\; |A \cup B| < \infty \;\wedge\; \mu(A \cup B) \\ &= \;\; 0 = \mu(A) + \mu(B) \\ |A| = \infty \;\;&\Rightarrow\;\; |A^c| < \infty, \\ A \cap B = \emptyset \;\;&\Rightarrow\;\; B \subseteq A^c \Rightarrow |B| < \infty \end{aligned}$$

Somit $\mu(A) + \mu(B) = 1 = \mu(A \cup B)$

13. Beweisen Sie:
μ sei ein σ-endliches Maß auf einem Halbring $\mathfrak{H}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{l}\exists I \subseteq \mathbb{N} \quad \exists (D_n, n \in I) : D_n \in \mathfrak{H}, \text{ disjunkt}, \\ \sum_{n\in I} D_n = \Omega, \mu(D_n) < \infty \quad \forall n \in I.\end{array}$$

Lg:
Zunächst: $A, B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{H} \quad D_j \in \mathfrak{H} \quad D_j \cap D_k = \emptyset$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & A \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i \\ = & A \cap \bigcap_{i=1}^m B_i^c \\ = & \bigcap_{i=1}^m (A \setminus B_i) \\ = & \bigcap \bigcup D_j \\ = & \bigcap_{i=1}^m (\sum_{j\in J_i} \underbrace{D_{ij}}_{\in \mathfrak{H}}) \\ = & \sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in J_1\times\cdots\times J_m} \underbrace{\bigcap_{i=1}^m D_{ij_i}}_{\in\mathfrak{H}} \\ (*) \quad = & : \sum_{j=1}^k D_j \end{array}$$

Weil μ σ-endlich ist $\Rightarrow$
$\exists (A_n)_{n\in I} : I \subseteq \mathbb{N}, \quad \mu(A_n) < \infty \ \forall n, \quad \Omega = \bigcup_{n\geq 1} A_n$
Nach $(*)$: $\forall n \quad \exists \underbrace{(D_j^n)_{j\in J_n}}_{\in\mathfrak{H}} : C_n := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \sum_{j\in J_n} D_j^n$
C_n alle disjunkt $\Rightarrow \Omega = \sum_{n\geq 1} C_n = \sum_{n\geq 1} \sum_{j\in J_n} \underbrace{D_j^n}_{\in\mathfrak{H}}$ q.e.d.

14. Es sei $\Omega := \{1,2,3,4,5\}$, $\mathfrak{H} := \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$, $\mu(\emptyset) := 0$, $\mu(\{2,3\}) := \mu(\{4,5\}) := \mu(\{1\}) := 1$
Ist $\mathfrak{H}$ eine Halbalgebra? Ist μ ein Inhalt? Wen ja, dann setzen Sie ihn auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$ fort!

Lg:
$\mathfrak{H}$ ist nicht Halbalgebra, denn $\Omega \neq \mathfrak{H}$
Aber: $\mathfrak{H}$ ist Halbring. μ ist Inhalt.

$$\begin{array}{lcllll} R(\mathfrak{H}) & = & \mathfrak{H}\cup & \{\{1,2,3\}, & \{1,4,5\}, & \{2,3,4,5\}, \quad \{1,2,3,4,5\}\} \\ \mu(\{\mathfrak{H}\}) & = & & 2 & 2 & 2 \qquad\qquad 3 \end{array}$$

$R(\mathfrak{H})$ ist Algebra! klar! (denn $A \in R(\mathfrak{H}) \Rightarrow A^c \in R(\mathfrak{H})$, aber $R(\mathfrak{H})$ ist ring, der Ω enthält.)
Damit ist Fortsetzung gegeben!

15. Auf $\Omega := (0,1] \cap \mathbb{Q}$ ist das Mengensystem $\mathfrak{T} := \{I_a^b := \{x \in \Omega : a < x \leq b\} : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ gegeben und auf μ wird eine Mengenfunktion μ difiniert durch $\mu(I_a^b) = b - a$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}$ eine Semialgebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass μ ein Inhalt ist aber kein Maß sein kann.

(c) μ ist stetig von unten und von oben.

Lg:

(a) $\emptyset \in \mathfrak{T}, \; \Omega \in \mathfrak{T}$,

$$\begin{aligned} I_a^b \subseteq I_c^d &\Rightarrow c \leq a \;\wedge\; b \leq d \\ \Rightarrow I_c^d \setminus I_a^b &= I_c^a \cup I_b^d \\ I_a^b \cap I_c^d &= I_{a \vee c}^{b \wedge d} \end{aligned}$$

(b) $\mu(I_a^b) + \mu(I_b^c) = b - a + c - b = c - a = \mu(I_a^c) = \mu(I_a^b \cup I_b^c)$
$\mu(\Omega) = \mu(I_0^1) = 1$
Aber $\Omega = \{r_1, r_2, \dots\} \subset \bigcup I_{r_n - \frac{\epsilon}{2^n}}^{r_n} \Rightarrow \mu(\Omega) \leq \sum \frac{\epsilon}{2^n} \leq \epsilon$ für bel. $\epsilon > 0$ Widerspruch!!

(c) $I_{a_n}^{b_n} \nearrow \Rightarrow a_n \searrow a = \inf a_n, b_n \nearrow b = \sup b_n$
$\mu(I_{a_n}^{b_n}) = \mu(I_a^b)$
Für $I_{a_n}^{b_n} \searrow$ analog

Folgerung: Der Definitionsbereich „Ring“ im Stetigkeitssatz kann nicht durch Semiring ersetzt werden!

1.5 induzierte Maße & Mengensysteme

1. Sei $\Omega = \{0, 1, 2\}, \mathfrak{C} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Man zeige, dass $\mathfrak{C}$ ein Semiring ist und bestimme alle Maße auf $\mathfrak{C}$ mit $\mu(\{1, 2\}) = 2$. Lg:
$\emptyset \in \mathfrak{C}, \{1\} \subseteq \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$ Semiring!
$\mu(\{1\}) = \alpha \Rightarrow \mu(\{2\}) = 2 - \alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 2$
$\mu(\emptyset) = 0, \mu(\{0\}) = \beta \geq 0.$

2. $\Omega = \{1, 2, 3\}$, Welche Mengensysteme $\mathfrak{C}$ sind Semiringe über Ω?

   (a) $\mathfrak{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
   (b) $\mathfrak{C} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$
   (c) $\mathfrak{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

   Lösung:

   (a) ja
   (b) nein: $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} \notin \mathfrak{C}$
   (c) nein: $\{1\} \setminus \{1\} = \emptyset \notin \mathfrak{C}$

3. Man gebe alle Ringe über $\Omega = \{1, 2, 3\}$ an.

   Lösung:
   $\mathfrak{R}_1 = \{\emptyset\}, \quad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{P}(\Omega), \quad \mathfrak{R}_3 = \{\emptyset, \Omega\},$
   $\mathfrak{R}_4 = \big\{\emptyset, \{1\}\big\}, \quad \mathfrak{R}_5 = \big\{\emptyset, \{2\}\big\}, \quad \mathfrak{R}_6 = \big\{\emptyset, \{3\}\big\},$
   $\mathfrak{R}_7 = \big\{\emptyset, \{1, 2\}\big\}, \quad \mathfrak{R}_8 = \big\{\emptyset, \{1, 3\}\big\}, \quad \mathfrak{R}_9 = \big\{\emptyset, \{2, 3\}\big\},$
   $\mathfrak{R}_{10} = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\big\}, \quad \mathfrak{R}_{11} = \big\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\big\},$
   $\mathfrak{R}_{12} = \big\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\big\}, \quad \mathfrak{R}_{13} = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\big\},$
   $\mathfrak{R}_{14} = \big\{\{2\}, \{1, 3\}, \emptyset, \Omega\big\}, \quad \mathfrak{R}_{15} = \big\{\{3\}, \{1, 2\}, \emptyset, \Omega\big\}$

$$\begin{array}{lll}
\text{Typ } 1: & \mathfrak{R} = \{\emptyset\} & \\
\text{Typ } 2: & \mathfrak{R} = \{\emptyset, A\} & A \subseteq \Omega \\
\text{Typ } 3: & \mathfrak{R} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\} & \emptyset \neq A \subset \Omega \\
\text{Typ } 4: & \mathfrak{R} = \big\{\emptyset, \{i\}, \{j\}, \{i, j\}\big\} & \\
\text{Typ } 5: & \mathfrak{R} = \mathfrak{P}(\Omega) &
\end{array}$$

4. $\mathbb{Q}_0$ bezeichne die Menge der rationalen Zahlen aus $(0, 1]$ und $\mathcal{M} := \big\{\{x \in \mathbb{Q}_0 : a < x \leq b\} : 0 \leq a \leq b \leq 1\big\}$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Halbring ist, und dass jedes $A \in \mathcal{M}$ entweder leer ist oder unendlich viele Elemente enthält. Bestimmen Sie $\mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{M})$!

   Beweis:

   1) $\emptyset = (a, b] \cap \mathbb{Q} = (a, b]^* \qquad$ mit $a = b$

2) $(a_1, b_1]^* \cap (a_2, b_2]^* = (\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)]^*$

3) $(a_1, b_1]^* \supseteq (a_2, b_2]^* \Rightarrow a_1 \le a_2 \;\wedge\; b_1 \ge b_2$
$\Rightarrow (a_1, b_1]^* - (a_2, b_2]^* =$

1) $= (b_2, b_1]^*$ falls $a_1 = a_2$
2) $= (a_1, a_2]^*$ falls $b_1 = b_2$
3) $= (a_1, a_2]^* \cup (b_2, b_1]^*$ sonst

Sei $q \in \mathbb{Q}_0$
$\Rightarrow \{q\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}]^* \quad \in \mathcal{M}_\sigma \subseteq R_\sigma(\mathcal{M}) \subseteq A_\sigma(\mathcal{M})$
$\Rightarrow R_\sigma(\mathcal{M}) = \mathfrak{P}(\mathbb{Q}_0)$
Min kommt auf Ω an

1) $\Omega = \mathbb{Q}_0 - \emptyset$ oder $\Omega = \mathbb{Q}_0$: $\quad A_\sigma(\mathcal{M} = \mathfrak{P}(\Omega)$
2) $\Omega = [0, 1]$
$A_\sigma(\mathfrak{H}) = \{A : A^c \subseteq \mathbb{Q}_0 \setminus \{0\} \vee A \subseteq \mathbb{Q}_0 \setminus \{0\} = \mathfrak{P}(\mathbb{Q}_0)$

Ist $A \in \mathcal{M} \ne \emptyset \Rightarrow A = \{x \in \mathbb{Q}_0 : a < x \le b\}$ mit $a < b$
aber: in $(a, b]$ $\exists$ ∞ viele rationale Zahlen, also ∞.

5. Bestimmen Sie $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{H})$ für den Halbring $\mathfrak{H}$.
$\mathfrak{H} := \{\{x \in \mathbb{Q}_0 : a < x \le b\} : 0 \le a \le b \le 1, a, b \in \mathbb{Q}_0\}$

Lösung:
Sei $q \in \mathbb{Q}_0$
$\Rightarrow \{q\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q}_0 \quad \in \mathfrak{H}_\sigma \subseteq R_\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq A_\sigma(\mathfrak{H})$
$\Rightarrow R_\sigma(\mathfrak{H}) = \mathfrak{P}(\mathbb{Q}_0)$
$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{H}) = \{A : A^c \subseteq \mathbb{Q}_0 \vee A \subseteq \mathbb{Q}_0\} = \mathfrak{P}(\mathbb{Q}_0)$
(rechte Seite ist tatsächlich σ-Algebra)

6. Man zeige, dass ein Semiring im weiteren Sinn im Allgemeinen kein Semiring im engeren Sinn (wie in VO definiert) ist.

Beweis:
Gegenbeispiel: $\mathfrak{T} = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1, 2\}\big\}$

7. Man zeige: ist $\mathfrak{C} \ne \emptyset$ ein beliebiges Mengensystem, so gilt
$\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) = \bigcup_{\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{C}:|\mathfrak{c}|\le\aleph_0} \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c})$

Beweis:
$\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) \quad \forall \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{C}$

$$\Rightarrow \bigcup_{\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{C}:|\mathfrak{c}|\leq\aleph_0} \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C})$$

$$A_n \in \underbrace{\bigcup_{\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{C}:|\mathfrak{c}|\leq\aleph_0} \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c})}_{=:\mathfrak{S}} \quad \forall n \Rightarrow \exists \mathfrak{c}_n : A_n \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c}_n)$$

$$\Rightarrow A_n \in \mathfrak{R}_\sigma(\bigcup \mathfrak{c}_n) \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathfrak{R}_\sigma(\bigcup \mathfrak{c}_n) \ \wedge \ |\bigcup_{\mathbb{N}} \mathfrak{c}_n| \leq \aleph_0$$

$$A, B \in \mathfrak{S} \Rightarrow \exists \mathfrak{c}_A, \mathfrak{c}_B : A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c}_A), B \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c}_B)$$
$$\Rightarrow A, B \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c}_A \cup \mathfrak{c}_B) \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{c}_A \cup \mathfrak{c}_B) \qquad \square$$

8. Geben Sie an, ob die folgenden Mengensysteme Semiringe, Semialgebren, Ringe, Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren, Dynkin-Systeme, monotone Systeme oder keines davon sind.

   (a) $|\Omega| = \infty$, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$
   (b) Ω beliebig, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$
   (c) $|\Omega| = \infty$, $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \Omega : |A| < \infty\}$
   (d) $|\Omega| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\mathfrak{C} = \{A \subseteq \Omega : |A| \equiv 0 \mod 2\}$

   Lösung:

   (a) Algebra
   $|\Omega| = \infty \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq \Omega$, $A_n = 2n$
   $\bigcup A_n \notin \mathfrak{C} \Rightarrow$ kein Dynkin-System
   $\Rightarrow$ kein σ-Ring, nicht monoton
   (b) σ-Algebra
   (c) Ring aber nicht monoton $\Rightarrow$ kein Dynkin-System, kein σ-Ring
   (d) $\Omega \in \mathfrak{C}$, $|A| = 2n \Rightarrow |A^c| = 2(k-n) \Leftrightarrow A^c \in \mathfrak{C}$
   $|A_i| = 2n_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow |\bigcup_{i=1}^n A_i| = 2\sum_{i=1}^n n_i \Rightarrow \bigcup_1^n A_i \in \mathfrak{C}$
   $\Rightarrow \mathfrak{C}$ Dynkin-System
   $|\mathfrak{C}| < \infty \Rightarrow \mathfrak{C}$ monoton
   aber $A \cap B \notin C$ i.A.
   Bsp: $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \qquad |A \cap B| = 1$

9. Man zeige: $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra $\Leftrightarrow$

   1) $\Omega \in \mathfrak{A}$
   2) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{A}$

   Beweis:

   $\Rightarrow$: $\mathfrak{A}$ Algebra $\Rightarrow \Omega \in \mathfrak{A}, A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$
   $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{A} \Rightarrow B \setminus A = B \cap A^c \in \mathfrak{A}$

$\Leftarrow$: $A \in \mathfrak{A},\ \Omega \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$
$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \setminus B^c = B \cap A \in \mathfrak{A}$
$A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathfrak{A}$ $\square$

10. (a) Ist $(\mathfrak{R}_n)$ eine Folge von Ringen mit $\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathfrak{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ ist ein Ring.
    (b) Ist $(\mathfrak{R}_n)$ eine Folge von σ-Ringen mit $\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1}$, so ist $\mathfrak{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ i.A. kein σ-Ring.

    Beweis:

    (a) $A \in \mathfrak{R}_{n_1},\ B \in \mathfrak{R}_{n_2} \Rightarrow A, B \in \mathfrak{R}_{n_1 \cup n_2} \Rightarrow B \setminus A,\ A \cup B,\ A \cap B \in \mathfrak{R}_{n_1 \vee n_2} \subseteq \mathfrak{R}$
    (b) $\Omega = \mathbb{N},\ \mathfrak{R}_n = \mathfrak{P}(\{1, \dots, n\})$
    $\mathfrak{R}_n$ ist σ-Ring
    $\mathfrak{R}_n \subseteq \mathfrak{R}_{n+1}$
    $\mathfrak{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{R}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : |A| < \infty\}$
    $A_n := \{1, \dots, n\} \in \mathfrak{R}$ aber $\bigcup A_n = \mathbb{N} \notin \mathfrak{R}$ $\square$

11. Welche Struktur (Halbring, Halbalgebra, Ring, ...) besitzt die Klasse der beschränkten d-dimensionalen Mengen?

    Lösung:
    Ring $\quad (\Rightarrow$ Halbring)
    keine Algebra, kein σ-Ring
    kein Dynkin-System
    aber $\cap$-stabil

12. Muss gelten $\mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{T})$, wenn $\mathfrak{T}$ eine Semialgebra ist?

    Lösung:
    $\mathfrak{T} := \big\{\emptyset, \Omega = \{0,1,2,3\}, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{2,3\}\big\}$
    $\mathfrak{T}$ ist Semialgebra, $\quad \Omega \in \mathfrak{T}, \quad A, B \in \mathfrak{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{T}$
    $\{0\} \subseteq \Omega, \quad \Omega \setminus \{0\} = \{1,2,3\} = \{1\} \cup \{2,3\}, \quad \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\} \in \mathfrak{T}, \quad \{0\} \cup \{1\} \cup \{2,3\} = \Omega$
    $\{1\} \subseteq \Omega$ analog
    $\Omega \setminus \{0,1\} = \{2,3\}, \quad \Omega \setminus \{2,3\} = \{0,1\}$
    $\mathfrak{T}$ ist endlich $\Rightarrow \mathfrak{T}$ ist monoton
    Aber $\{1\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathfrak{T} \Rightarrow \mathfrak{T}$ keine Algebra

13. Man bilde die von den folgenden Mengensystemen erzeugten σ-Algebren

    (a) Ω beliebig, $A \subseteq \Omega, \mathfrak{C} = \{A\}$
    (b) Ω beliebig, $\mathfrak{C}_A := \{B : A \subseteq B\}$
    (c) $\mathfrak{C} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| = 2\}$

Lösung

(a) $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$

(b) $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_A) = \mathfrak{C}_A \cup \mathfrak{P}(A^c)$
$\Omega \in \mathfrak{C}_A \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_A)$
$B \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_A)$

   1) $B \in \mathfrak{C}_A \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c \Rightarrow B^c \in \mathfrak{P}(A^c) \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_A)$
   2) $B \in \mathfrak{P}(A^c) \Rightarrow B \subseteq A^c \Rightarrow B^c \supset A \Rightarrow B^c \in \mathfrak{C}_A$

   $B_n \in \mathfrak{A}$

   1) $B_n \in \mathfrak{P}(A^c) \forall n \Rightarrow \bigcup B_n \in \mathfrak{P}(A^c) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_A)$
   2) $\exists B_1 \in \mathfrak{C}_A \Rightarrow A \subseteq B_1 \subseteq \bigcup B_n \Rightarrow \bigcup B_n \in \mathfrak{C}_A \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_A)$

(c) $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| \leq \aleph_0 \quad \vee \quad |A^c| \leq \aleph_0\}$

14. Sind $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ 2 Semialgebren, so gilt:
$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T})$ mit $\mathfrak{T} := \{A : A = A_1 \cap A_2 : A_i \in \mathfrak{T}_i\}$

    Beweis:
    $A \in \mathfrak{T}_1 \Rightarrow A = A \cap \Omega \in \mathfrak{T}$, analog $A \in \mathfrak{T}_2 \Rightarrow A = \Omega \cap A \in \mathfrak{T}$
    $\Rightarrow \mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T})$
    Umgekehrt gilt $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$
    und $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$ ist σ-Algebra
    Somit $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$ □

15. $(H_i)_i \in I$ sei eine Familie von Halbalgebren über Ω,

$$\mathfrak{C} := \{\bigcap_{j=1}^{\infty} A_{i_j}, i_j \in I, j = 1, 2, \dots\}.$$

    Dann ist

$$A_\sigma(\bigcup_{i \in I} H_i) = A_\sigma(\mathfrak{C}).$$

    Lg:

   1) $\mathfrak{C} \subseteq A_\sigma(\bigcup_{i\in I} H_i)$
   $\Rightarrow A_\sigma(\mathfrak{C}) \subseteq A_\sigma(\bigcup_{i\in I} H_i)$
   2) $H_i \subseteq \mathfrak{C} \quad \forall i \in I$ klar
   $\Rightarrow H_i \subseteq A_\sigma(\mathfrak{C})$
   $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} H_i \subseteq A_\sigma(\mathfrak{C})$
   $\Rightarrow A_\sigma(\bigcup_{i\in I} H_i) \subseteq A_\sigma(\mathfrak{C})$

16. Sei Ω eine beliebige Menge und $\mathfrak{C} = \{A_1, \dots, A_n\}$ ein System verschiedener Teilmengen von Ω. Man schreibe $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ explizit an und schätze

$|\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})|$.

Lösung:

$$A_i^\epsilon := \begin{cases} A_i, & \epsilon = 1 \\ A_i^0, & \epsilon = 0 \end{cases}$$

$\mathfrak{g} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} : (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n \right\} \Rightarrow |\mathfrak{g}| \leq 2^n$
Weiters ist klar, dass je 2 verschiedene Mengen aus $\mathfrak{g}$ disjunkt sind.
Sei $\mathfrak{g} = \{D_1, \dots, D_m\}$ die verschiedenen Durschnitte in $\mathfrak{g}$.
Bilde $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \bigcup_{j=1}^k D_{i_j} : \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}, 1 \leq k \leq m\}$
Offensichtlich gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ und
$|\mathfrak{A}| = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = (1+1)^m \leq 2^{(2^n)}$

17. Man zeige, dass jeder σ-Ring endlich oder überabzählbar sein muss.

Beweis:
$\mathfrak{R}$ ein σ-Ring, $|\mathfrak{R} = \infty$, (A_n) eine Folge verschiedener Mengen aus $\mathfrak{R}$, d.h. $n \neq m \Rightarrow A_n \neq A_m$.
$A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{R}$

$$\text{Def: } A_n^\epsilon = \begin{cases} A_n, & \epsilon = 1 \\ A^* \setminus A_n, & \epsilon = 0 \end{cases}$$

$\mathfrak{g} := \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\epsilon_n} : (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \right\}$
Klarerweise gilt: $A_n = \bigcup D \quad D \in \mathfrak{g}, \quad D \subseteq A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$|\mathfrak{g}| < \infty \Rightarrow$ es gäbe höchstens endlich viele verschiedene $A_n \Rightarrow |\mathfrak{g}| = \infty$
$D_1, D_2 \in \mathfrak{g} \wedge D_1 \neq D_2 \Rightarrow \exists n : \epsilon_n = 1$ in $D_1 \wedge \epsilon_n = 0$ in D_2 oder umgekehrt $\Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset$
Sei nun (D_n) eine Folge verschiedener und damit diskunkter Mengen aus $\mathfrak{g}$.
Bilde für jede Binärfolge (b_n) die Menge $B(b_1, b_2, \dots) := \bigcup_{n: b_n = 1} D_n$
Klarerweise folgt aus $(b_1, b_2, \dots) \neq (\tilde{b_1}, \tilde{b_2}, \dots)$ auch $B(b_1, b_2, \dots) \neq B(\tilde{b_1}, \tilde{b_2}, \dots)$.
Aber $|\left\{(b_1, b_2, \dots) : b_i \in \{0,1\}\right\}| > \aleph_0$ $\square$

18. Ist $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Funktion und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω_1, so zeige man, dass $T(\mathfrak{A})$ i.A. weder ein Semiring noch ein Dynkin-System sein muss.

Beweis:
Gegenbeispiel:
$\Omega_1 = \{1,2,3,4\}, \quad \Omega_2 = \{a,b,c\}$
$T(1) = T(2) = a, \quad T(3) = b, \quad T(4) = c$
Sei $\mathfrak{A} := \big\{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}, \Omega_1\big\}$ ist offensichtlich σ-Algebra
$T(\mathfrak{A}) = \big\{\emptyset, \Omega_2, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}\big\}$
Wegen $\{a,b\} \setminus \{a\} = \{b\} \notin T(\mathfrak{A})$ kein Semiring und auch kein Dynkin-System $\square$

19. Ist $\mathfrak{C} \neq \emptyset$ ein beliebiges Mengensystem, so gilt: $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) \Leftrightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$

Beweis:

$\Rightarrow$: $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) \ \wedge \ \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) \Rightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$
$\Leftarrow$: $\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{C}), \quad \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$ monoton
$\Rightarrow \mathfrak{M}\big(\mathfrak{R}(\mathfrak{C})\big) \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{C})$
Somit $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{M}\big(\mathfrak{R}(\mathfrak{C})\big) = \mathfrak{R}_\sigma\big(\mathfrak{R}(\mathfrak{C})\big)$
$\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}), \quad \mathfrak{R}_\sigma$ ist σ-Ring
$\Rightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C})$
$\Rightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C})$ $\square$

20. Ist $\mathfrak{C} \neq \emptyset$, so gilt:

(a) $A \in \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) \Rightarrow \exists (C_n) : C_n \in \mathfrak{C} \ \forall n \ \wedge \ A \subseteq \bigcup_{\mathbb{N}} C_n$
(b) $A \in \mathfrak{R}(\mathfrak{C}) \Rightarrow \exists C_1, \ldots, C_n : C_i \in \mathfrak{C}, i = 1, \ldots, n \vee A \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i$

Beweis:

(a) $\mathfrak{S} := \{B : \exists (C_n) : C_n \in \mathfrak{C} \ \forall n, B \subseteq \bigcup C_n\}$
$$B_i \in \mathfrak{S} \ \forall i \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{n,i} \Rightarrow \bigcup B_i \in \mathfrak{S}$$
$$B_1, B_2 \in \mathfrak{S} \Rightarrow B_1 \setminus B_2 \subseteq B_1 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_{n,1} \in \mathfrak{S}$$
$\mathfrak{S}$ ist also ein σ-Ring $\Rightarrow \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{S}$
(b) geht analog

21. Man zeige, dass das System der Borelmengen auf $\mathbb{R}$ erzeugt wird durch

(a) die offenen Mengen
(b) die abgeschlossenen Mengen
(c) die kompakten Menge

Beweis:

(a) $(a,b) = \bigcup_{\mathbb{N}} \big(a, b - \frac{1}{n}\big] \Rightarrow (a,b) \in \mathfrak{B}$

Umgekehrt $(a,b] = \bigcap_{\mathbb{N}} \big(a, b + \frac{1}{n}\big)$

Somit liegen alle halboffenen Intervall im $\mathfrak{R}_\sigma\big((a,b), a,b \in \mathbb{R}\big)$, jede offene Menge ist eine Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle (siehe Kolmogoroff-F..)

(b) abgeschlossene Mengen sind Komplemente offener Mengen

(c) Die beschränkten abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ sind kompakt (Heine-Borel)
$\Rightarrow \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{R}_\sigma(\mathfrak{K})$, $\quad \mathfrak{K}$ System der kompakten Mengen.
Da jede kompakte Menge abgeschlossen ist und die abgeschlossenen Mengen in $\mathfrak{B}$ liegen, gilt auch die Umkehrung.

22. Man zeige, dass der Durchschnitt von Semiringen (i.e.S) i.A. kein Semiring ist.

Beweis:
Gegenbeispiel:
$\mathfrak{T}_1 := \big\{\emptyset, \{0\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\big\}$
$\mathfrak{T}_2 := \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}\big\}$
$\mathfrak{T}_1$ Semiring
$\mathfrak{T}_2 : \{0\} : \{0,2,3\} \setminus \{0\} = \{2,3\} \in \mathfrak{T}_2$
$.. : \Omega \setminus \{0\} = \{2,3\} \cup \{1\}, \quad \{0\} \cup \{2,3\} = \{0,2,3\} \in \mathfrak{T}_2, \quad \{0\} \cup \{2,3\} \cup \{1\} = \Omega \in \mathfrak{T}_2$
$\{1\} : \Omega \setminus \{1\} = \{0,2,3\} \in \mathfrak{T}_2$
$\{2,3\} : \{0,2,3\} \setminus \{2,3\} = \{0\} \in \mathfrak{T}_2, \quad \Omega \setminus \{2,3\} = \{0\} \cup \{1\} \qquad \{0,2,3\} \in \mathfrak{T}_2$
$\{0,2,3\} : \Omega \setminus \{0,2,3\} = \{1\}$
$\mathfrak{T}_2$ Semiring
$\mathfrak{T}_1 \cap \mathfrak{T}_2 = \big\{\emptyset, \Omega, \{0\}\big\}$ kein Semiring

23. Man zeige, dass für die von einem Ring $\mathfrak{R}$ erzeugte Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ gilt:
$\mathfrak{A}(\mathfrak{R}) := \{A : A \in \mathfrak{R} \vee A^c \in \mathfrak{R}\}$

Beweis:
$\mathfrak{S} := \{A : A \in \mathfrak{R} \vee A^c \in \mathfrak{R}\}$
Da für jede Algebra $\mathfrak{A}$ gilt $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$, muss $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A} \quad \forall \mathfrak{A}$ Algebra, $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{R} \Rightarrow \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$.
$A \in \mathfrak{S} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{S}$
$A, B \in \mathfrak{S}$:

1) $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S}$

2) $A \in \mathfrak{R}, B^c \in \mathfrak{R} \Rightarrow B^c \setminus A = B^c \cap A^c \in \mathfrak{R} \Rightarrow (B^c \cap A^c)^c = A \cup B \in \mathfrak{S}$

3) $A^c \in \mathfrak{R}, B \in \mathfrak{R}$: wie oben

4) $A^c \in \mathfrak{R}, B^c \in \mathfrak{R} \Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathfrak{S}$

$\square$

24. Man beweise: Ist $\mathfrak{T}$ ein Semiring, so gilt:
$\mathfrak{R}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{R}_1 := \{B : \exists n \in \mathbb{N}\, \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{T}, A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i = j : B = \bigcup_{i=1}^n A_i\} = \mathfrak{R}_2 := \{B : \exists n \in \mathbb{N}\, \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{T} : B = \bigcup_{i=1}^n A_i\}$

Beweis:
$B_1, B_2 \in \mathfrak{R}_1 \;\wedge\; B_1 = \bigcup_{i=1}^n A_{i,1},\ B_2 = \bigcup_{j=1}^m A_{j,2}$
Lemma $8b \Rightarrow \exists C_1, \ldots, C_k \quad C_j \cap C_i = \emptyset\, \forall i \neq j$
$B_1 = \bigcup_{I_1} C_i, B2 = \bigcup_{I_2} C_i \Rightarrow B_1 \cup B_2 = \bigcup_{I_1 \cup I_2} C_i \in \mathfrak{R}_1$
$B_1 \setminus B_2 = \bigcup_{l=1}^m C_i \in \mathfrak{R}_1$ wegen Lemma $8a$
Somit $\mathfrak{R}_1$ ein Ring $\Rightarrow \mathfrak{R}(\mathfrak{T}) \subset \mathfrak{R}_1$
Andererseits $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R} \forall \mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$.
Somit $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$
Offensichtlich $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_2$, ist umgekehrt $\mathfrak{R}$ ein Ring mit $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{R}$, so gilt auch $\mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{R} \Rightarrow \mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{R}_1 \Rightarrow \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2$ $\square$

25. Man beweise, dass $\mathfrak{T} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n A_i : A_i \in \mathfrak{T}_i, i = 1, \ldots, n \right\}$ ein Semiring i.w.S. auf Ω ist, wenn alle $\mathfrak{T}_i$ Semiringe i.w.S. sind.

Beweis:

$$n = 2 : \emptyset \in \mathfrak{T}_i \forall i \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i=1}^n \emptyset \in \mathfrak{T}$$

$$A = \bigcap_{i=1}^2 A_i, B = \bigcap_{i=1}^2 B_i \Rightarrow A \cap B = \bigcap_{i=1}^2 \underbrace{A_i \cap B_i}_{\in \mathfrak{T}_i} \in \mathfrak{T}$$

$$A = \bigcap_{i=1}^2 A_i \subseteq B = \bigcap_{i=1}^2 B_i$$

$B \setminus A = B_1 \cap B_2 \cap (A_1^c \cup A_2^c) = (B_1 \cap B_2 \cap A_1^c) \cup (B_1 \cap B_2 \cap A_2^c) =$
$= \big[(B_1 \setminus A_1) \cap B_2\big] \cup \big[B_1 \cap (B_2 \setminus A_2)\big] =$
$= \big[(B_1 \setminus A_1) \cap A_2\big] \cup \big[(B_1 \setminus A_1) \cap (B_2 \setminus A_2)\big] \cup \big[A_1 \cap (B_2 \setminus A_2)\big] \cup \big[(B_1 \setminus A_1) \cap B_2\big] =$
$= \big[\big(B_1 \setminus (A_1 \cap B_1)\big) \cap A_2\big] \cup \big[\big(B_1 \setminus (A_1 \cap B_1)\big) \cap \big(B_2 \setminus (A_2 \cap B_2)\big)\big] \cup \big[A_1 \cap \big(B_2 \setminus (A_2 \cap B_2)\big)\big]$

$$\bigcup_{j=1}^k (C_j \cap A_2) \cup \underbrace{\bigcup_{j=1}^{k_1} C_j \cap \bigcup_{k=1}^{k_2} D_k}_{\bigcup_j \bigcup_k (C_j \cap D_k)} \qquad \bigcup_{k=1}^{k_2} (D_k \cap A_1)$$

Für $n > 2$ vollständige Induktion

$$\Big(\mathfrak{T}_1 = \Big\{ \bigcap_{i=1}^{n} D_i \quad D_i \in \mathfrak{T}_i \Big\}, \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_{n+1}\Big) \qquad \square$$

26. Ω, Ω' seien nichtleere Mengen, $f : \Omega \to \Omega'$ eine beliebige Abbildung.

   (a) Ist für jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}'$ in Ω' $f^{-1}(\mathfrak{D}')$ ein Dynkin-System in Ω?

   (b) Ist für jedes Dynkin-System $\mathfrak{D}$ in Ω, $\mathfrak{D}' := \{B \subseteq \Omega' : f^{-1}(B) \in \mathfrak{D}\}$ ein Dynkin-System?

Lösung:

(a) $\mathfrak{D}'$ Dynkin-System in Ω', $f : \Omega \to \Omega'$, $\mathfrak{D} := f^{-1}(\mathfrak{D}')$

1) $\Omega \in \mathfrak{D}$, denn $\Omega = f^{-1}(\Omega')$

2) $A, B \in \mathfrak{D}$, $A \subseteq B$
$\Rightarrow \exists A', B' \in \mathfrak{D}' : \ A = f^{-1}(A'), B = f^{-1}(B')$,
aber es gilt nicht notwendigerweise: $A' \subseteq B'$.
Da $A' \cap B' \in \mathfrak{D}'$ nicht folgt, hilft hier die Darstellung $B' \setminus A' = B' \setminus (A' \cap B')$ nicht weiter. $\not\Rightarrow \ B' \setminus A' \in \mathfrak{D}$!

3) $f^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$

Gegenbeispiel: $\Omega := \{1, 2, 3\}$; $\quad \Omega' := \{a, b, c, d\}$
$\mathfrak{D}' := \big\{\emptyset, \Omega', \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\big\}$ ist (nicht $\cap$-stabiles!) Dynkin-System.
$f(1) := a$, $f(2) := c$, $f(3) := d$
$\Rightarrow f^{-1}(\mathfrak{D}') = \big\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3\}\big\}$ kein Dynkin-System!
$\Big(\{1, 2\} \setminus \{1\}, \{2, 3\} \setminus \{2\} \notin f^{-1}(\mathfrak{D}')\Big)$

(b) $\mathfrak{D}$ Dynkin-System in Ω, $\mathfrak{D}' := \{B \subseteq \Omega' : f^{-1}(B) \in \mathfrak{D}\}$

1) $\Omega' \in \mathfrak{D}'$, denn $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathfrak{D}$

2) $B_1, B_2 \in \mathfrak{D}' : B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_i) \in \mathfrak{D} \ \wedge \ f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
$\Rightarrow f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1) \in \mathfrak{D}$
$\Rightarrow B_2 \setminus B_1 \in \mathfrak{D}'$

3) $(B_n)_{n=1,2,\ldots} \in (\mathfrak{D}')^{\mathbb{N}}$ disjunkt $\Rightarrow \big(f^{-1}(B_n)\big)_n \in \mathfrak{D}^{\mathbb{N}}$, disjunkt
$\Rightarrow \sum_{\mathbb{N}} B_n \in \mathfrak{D}'$
$\Rightarrow \mathfrak{D}'$ Dynkin-System

1.6 elementare Mengenlehre

1. Man zeige: $A\triangle B = C\triangle D \Leftrightarrow A\triangle C = B\triangle D$

   Beweis:
   $A\triangle B = C\triangle D \Rightarrow (A\triangle B)\triangle C = (C\triangle D)\triangle C = (C\triangle C)\triangle D = D$
   $\Rightarrow \underbrace{(A\triangle B\triangle C)\triangle B}_{A\triangle C} = D\triangle B$ $\square$

2. Man zeige: $(A\triangle B) \cup (B\triangle C) \supseteq A\triangle C$

   Beweis:
   $A\triangle C = (A\cap C^c)\cup(A^c\cap C) = (A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap C)$
   $(A\triangle B) \cup (B\triangle C) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)$
   $A\cap C^c \subseteq (A\triangle B)\cup(B\triangle C)$
   $A^c\cap C \subseteq (A\triangle B)\cup(B\triangle C)$ folgt aus Symmetriegründen $\square$

3. Man beweise:

   a) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i \setminus (\bigcup\limits_{j\in I} A_j) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}(B_i \setminus A_i)$

   b) $\bigcap\limits_{i\in I} B_i \setminus (\bigcap\limits_{j\in I} A_j) \subseteq \bigcup\limits_{i\in I}(B_i \setminus A_i)$

   Beweis:

   a) $\bigcup\limits_{I} B_i \cap (\bigcap\limits_{I} A_j^c) = \bigcup\limits_{I}(B_i \cap \bigcap\limits_{I} A_j^c) \subseteq \bigcup(B_i \cap A_i^c) = \bigcup(B_i \setminus A_i)$

   b) $\bigcap\limits_{I} B_i \cap (\bigcup\limits_{I} A_i^c) = \bigcup\limits_{j}((\bigcap\limits_{i\in I} B_i) \cap A_j^c) \subseteq \bigcup\limits_{j}(B_j \cap A_j^c) = \bigcup\limits_{j}(B_j \setminus A_j)$

4. Für beliebige Mengen $A_1, \dots, A_n$ definiere man $U_k := \bigcup\limits_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \bigcap\limits_{j=1}^{n} A_{ij}$,

   $D_k := \bigcap\limits_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_{ij}$.
   Man beweise: $U_k = D_{n+1-k} \qquad 1 \le k \le n$

   Beweis:
   $\omega \in U_k \Leftrightarrow \omega$ liegt in mindestens k der Mengen $A_1, \dots, A_n$
   Somit $\omega \in U_k^c \Leftrightarrow \omega$ liegt in höchstens $k-1$ der Mengen $A_1, \dots, A_n$
   $D_{n+1-k}^c = \bigcup\limits_{1\le i_1<\dots<i_{n+1-k}\le n} \bigcap\limits_{j=1}^{n+1-k} A_{ij}^c$
   $\omega \in D_{n+1-k}^c \Leftrightarrow \omega$ liegt in mindestens $n+1-k$ der Mengen A_i^c, d.h. ω

liegt in höchstens $n-(n+1-k)=k-1$ der Mengen A_i
Somit $\omega \in D^c_{n+1-k} \Leftrightarrow \omega \in U^c_k \Rightarrow U_k = D_{n+1-k}$ $\square$

5. Man beweise:

   a) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \min\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$
   b) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$
   c) $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)$
   d) $\mathbb{1}_{A\triangle B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)\bmod 2$

   Beweis:

   a) klar
   b) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$
   $\mathbb{1}_{A\cup B} = 1 - \mathbb{1}_{A^c\cap B^c} = 1-(1-\mathbb{1}_A)(1-\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
   $\mathbb{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B\}$
   c) $A\setminus B = A\cap B^c \Rightarrow \mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B^c} = \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)$
   d) $\mathbb{1}_{A\triangle B} = \mathbb{1}_{A\cup B}(1-\mathbb{1}_{A\cap B}) = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)$
   $= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - \underbrace{\mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B}_{\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B} - \underbrace{\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B^2}_{\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B} + \underbrace{\mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B^2}_{\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
   $$|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = \begin{cases} 1 & \omega \in A \ \wedge\ \omega \notin B \quad \vee \quad \omega \notin A \ \wedge\ \omega \in B \\ 0 & sonst \end{cases}$$
   $(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B)\bmod 2 = 1 \Leftrightarrow (\omega \in A \ \wedge\ \omega \notin B) \vee (\omega \notin A \ \wedge\ \omega \in B) =$
   $\mathbb{1}_{A\triangle B}$

6. $(X_n)_{n\geq 1}$ sei eine reelle Folge. Beweisen Sie:
   $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} x_k \quad , \quad \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k$

   Lösung:
   $\underline{x} = \liminf x_n$ ist kleinster Häufungspunkt von (X_n)

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall\epsilon > 0 \quad \exists n_0(\epsilon) = n_0 : & x_n \geq \underline{x} - \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \\ \forall\epsilon > 0 \quad \exists (n_k)_{k\geq 1}, n_k \nearrow : & |x_{n_k} - \underline{x}| < \epsilon \quad \forall k \geq 1 \Leftrightarrow \underline{x} - \epsilon \geq x_{n_k} \geq \underline{x} + \epsilon \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

   $\Rightarrow \inf_{k\geq n} x_k \geq \underline{x} - \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

   (i) $\Rightarrow \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} x_n \geq \underline{x} - \epsilon$
   $x_{n_k} \geq \underline{x} + \epsilon \qquad \forall k \geq 1 \qquad n_k \nearrow \infty$
   $\Rightarrow \inf\limits_{k\geq n} x_k \leq \underline{x} + \epsilon \quad \forall n \geq 1$

   (ii) $\Rightarrow \sup\limits_{n\geq 1} \inf k \geq n x_k \geq \underline{x} + \epsilon$

In (i) & (ii) $\epsilon \nearrow 0$ gibt $\underline{x} = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} x_k$

$\overline{x}$ auch ???????

Fall $\underline{x} = +\infty$

$\Rightarrow \forall c > 0 \qquad x_n \geq c \quad \forall n \geq n_0(c)$

$\Rightarrow \inf\limits_{k\geq n} x_k \geq c \quad \forall n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow \sup\limits_{k\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} x_k \geq c$

$\Rightarrow \sup\limits_{k\geq 1} \inf\limits_{k\geq n} x_k = \infty$

Fall $\underline{x} = -\infty$

$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad \exists$ Teilfolge $x_{n_k} \leq c \Rightarrow \inf_{k\geq n} x_k \leq c \quad \forall n$

$\Rightarrow \sup_n \inf_{k\geq n} x_k \leq c \Rightarrow \sup\inf = -\infty$

7. Man beweise: Sei (A_n) eine Mengenfolge, dann gilt:

   a) $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\limsup A_n}$
   b) $\liminf \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\liminf A_n}$
   c) $A_n \uparrow A_0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A_n} \uparrow \mathbb{1}_{A_0}$
   d) $A_n \downarrow A_0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A_n} \downarrow \mathbb{1}_{A_0}$
   e) $\lim A_n = A_0 \Leftrightarrow \lim \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{A_0}$

   Beweis:

   a) $\lim_n \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}(x) = 1 \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}(x) = 1$
   $\wedge \quad \sup_{k\geq n} \mathbb{1}_{A_k}(x) = 1 \Leftrightarrow \exists k \geq n : \mathbb{1}_{A_k} = 1 \Leftrightarrow \exists k \geq n, x \in A_k \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{k\geq n} A_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   b) Analog zu a)
   c) $A_n \uparrow A_0, x \in A_0 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A_0}(x) = 1 \Leftrightarrow \exists x \in A_n : \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1 \Leftrightarrow \lim \mathbb{1}_{A_n} = 1$
   d) Analog zu c)
   e) $\lim A_n = A_0 \Leftrightarrow \limsup A_n = \liminf A_n = A_0 \Leftrightarrow (a), (b)$
   $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{A_0} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$

8. Sei a_n eine Folge reeller Zahlen; man zeige:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k$$

Beweis:

$\limsup a_n =$dgr. Hpkt der Folge d.h.

$\forall \epsilon > 0 \exists \forall n k \geq n a_k \geq d - \epsilon, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad a_k < d + \epsilon$

$\Rightarrow \sup\limits_{k\geq n} a_k \leq d + \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \limsup\limits_{k\geq n} a_k \leq d + \epsilon \quad$ (ϵbel.$\Rightarrow$ Beweis

sei $n \in \mathbb{N}$ bel. $\Rightarrow \sup\limits_{k\geq n} a_k \geq d - \epsilon \Rightarrow \limsup\limits_{k\geq n} a_k \geq d - \epsilon$ $\square$

9. Man bilde $\limsup_n a_n, \liminf a_n, \limsup A_n, \liminf A_n$ mit $a_n := (-1)^n(1+\frac{1}{n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}, A_n := [-2, a_n]$.

   Lösung:
   $\limsup a_n = 1, \liminf a_n = -1$
   $\limsup A_n = [-2, 1], \liminf A_n = [-2, -1]$

10. Sind $(A_n), (B_n)$ zwei Mengenfolgen, so gilt:

    a) $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$
    b) $\liminf A_n \cup \liminf B_n \subset \liminf(A_n \cup B_n) \subset \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$

    Beweis:

    a) $\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\Big)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k^c$

    b) $\underbrace{\bigcup_{n_1\in\mathbb{N}} \bigcap_{k_1\geq n} A_{k_1} \cup \bigcup_{n_2\in\mathbb{N}} \bigcap_{k_2\geq n} B_{k_2}}_{D} \subset \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} (A_k \cup B_k)}_{E}$

$$x \in D \Rightarrow \exists n_1 : x \in A_k$$
$$\forall k \geq n_1 \Rightarrow x \in A_k \cup B_k$$
$$\forall k \geq n_1 \Rightarrow x \in \bigcap_{k\geq n_1} (A_k \cup B_k)$$
$$x \in \bigcap_{n} \bigcup_{k\geq n} (A_k \cup B_k)$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists K \geq n : x \in A_k \vee x \in B_k,$$
$$o.E.d.A. x \in A_k$$
$$x \in \bigcap_{n_1} \bigcup_{k_1\geq n_1} A_{k_1} \cup \bigcap_{n_2} \bigcup_{k_2\geq n_2} A_{k_2}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \exists k \geq n : x \in A_k \vee \quad \forall n \exists k \geq n : x \in B_k$$

11. Man zeige: $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \underbrace{\Big(\bigcap_{k=1} A_k\Big) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \triangle A_{k+1})}_{R}$

    Beweis:
    $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \wedge \quad A_k \triangle A_{k+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \forall k$
    $\Rightarrow R \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

Sei umgekehrt $\omega \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow (\omega \in A_k \quad \forall K = 1, \dots, n) \quad \omega \in (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus (\bigcap_{k=1}^{n} A_k)$

def. für: $\omega \in (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus (\bigcap_{k=1}^{n} A_k)$:
$n(\omega) = \min\{k : \omega \notin A_k\}$
Sei $n(\omega) > 1 \Rightarrow \omega \in A_{n(\omega)-1}, \omega \notin A_{n(\omega)} \Rightarrow \omega \in A_{n(\omega)-1} \setminus A_{n(\omega)} \subseteq A_{n(\omega)-1} \triangle A_{n(\omega)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \triangle A_{k+1})$
Sei $n(\omega) = 1 \Rightarrow \omega \notin A_1$, definiere in diesem Fall:
$l(\omega) = \min\{k : \omega \in A_k\} \quad 2 \leq l(\omega) \leq n$
Somit $\omega \notin A_{l(\omega)-1}, \omega \in A_{l(\omega)} \Rightarrow \omega \in A_{l(\omega)} \triangle A_{l(\omega)-1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \triangle A_{k+1}$ □

12. Bestimmen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$ für folgende Mengenfolgen:

   a) $A_n := [0, 1]$, falls n gerade und $:= [1, 2]$, falls n ungerade ist;
   b) $A_{2k-1} := [-2 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}], A_{2k} := [-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}] \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
   c) $A_n := (0, 1 - \frac{1}{n}]$, falls n gerade und $:= (\frac{1}{n}, 1)$, falls n ungerade ist.

   Sind die Folgen isoton? Sind sie konvergent?

   Lösung:

   a) $\overline{A} = \overline{\lim} A_n = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [0, 2] = [0, 2]$
   $\underline{A} = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{1\} = \{1\}$
   Nicht isoton, nicht konvergent!
   b) $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-2 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}] = [-1, 1]$
   $\underline{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{2k \geq n} [-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1) = [0, 1)$
   Nicht isoton, nicht konvergent!
   c) $\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1) = (0, 1)$
   $\underline{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$
   Nicht isoton, aber konvergent!

13. Es sei $\Omega = \mathbb{R}^2$, und A_n bezeichne die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\left(\frac{(-1)^n}{n}, 0\right)$ und Radius 1.
Bestimmen Sie $\liminf A_n$ und $\limsup A_n$!

Lösung:

$$\omega \in A_n, \omega = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + y^2 < 1 \qquad (*)$$

1) Gelte $\omega \in \underline{A} := \liminf A_n$
$\Rightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad (*) \qquad \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{2}{n}(-1)^n x + \frac{1}{n^2} < 1 \qquad \forall n \geq n_0 \qquad (**)$

$$x^2 + y^2 < 1 \begin{cases} x > 0: & -\frac{2}{n}(-1)^n x > 0 \quad \text{für } n \equiv 1(2) \\ x < 0: & -\frac{2}{n}(-1)^n x > 0 \quad \text{für } n \equiv 0(2) \\ x = 0: & y^2 < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{A} \subseteq \{\omega : x^2 + y^2 < 1\}$
Gelte umgekehrt: $x^2 + y^2 < 1$
weil $\quad t \longmapsto (x \pm t)^2 \quad$ stetig bei 0:
$\exists \delta > 0: \quad (x-t)^2 + y^2 < 1 \qquad \forall t : |t| < \delta$
$(x+t)^2 + y^2 < 1$
$\Rightarrow \left(x - \frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + y^2 < 1 \qquad \forall n \geq \frac{1}{\delta}$
$\Rightarrow (x,y) \in A_n \qquad \forall n \geq \frac{1}{\delta} \Rightarrow (x,y) \in \underline{A}$
$\Longrightarrow \underline{\lim} A_n = \{\omega : \quad x^2 + y^2 < 1\}$

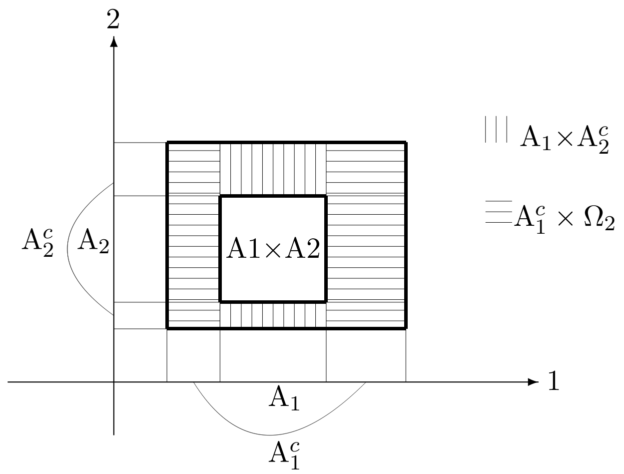
2) Gelte $\omega \in \overline{A} := \limsup A_n$
$\Rightarrow (**)$ für ∞ viele $n \qquad \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 1$
Ang: $(0,1), (0,-1) \in \overline{A}$: geht nicht, denn $\frac{(-1)}{n}\dot{0} + 1 + \frac{1}{n^2} < 1$ gibt Widerspruch
$\Rightarrow \overline{A} \subseteq B := \{\omega : \quad x^2 + y^2 \geq 1\} \setminus \{(0,1), (0,-1)\}$
Sei $\omega = (x,y) \in B$
Falls $\qquad x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow \omega \in \underline{A} \subseteq \overline{A}$
Falls $\qquad x^2 + y^2 = 1 \qquad ;$
Ist $x > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \qquad (x-t)^2 < x^2 \quad$ für $0 < t < \delta$
$\Rightarrow \left(x - \frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + y^2 < x^2 + y^2 = 1 \quad$ für $n \geq \frac{1}{\delta}, n \equiv\equiv 0(2)$
Ist $x < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \qquad (x+t)^2 < x^2 \quad$ für $0 < t < \delta$
$\Rightarrow \left(x + \left(-\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)^2 + y^2 < x^2 + y^2 = 1 \quad$ für $n \geq \frac{1}{\delta}, n \equiv\equiv 1(2)$
Ist $x = 0$, so ist $y^2 = 1 \quad \left(\Rightarrow \left(-\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + y^2 > 1\right)$
kommt nicht in Frage, denn $(0,1), (0,-1) \notin B$
Für $x > 0$ bzw. $x < 0$ ist $\omega \in A_n$ für ∞ viele n
$\Rightarrow \omega \in \overline{A}$
$\Longrightarrow \overline{A} = B$
$\underline{A} \subsetneqq \overline{A}$ nicht konvergent!

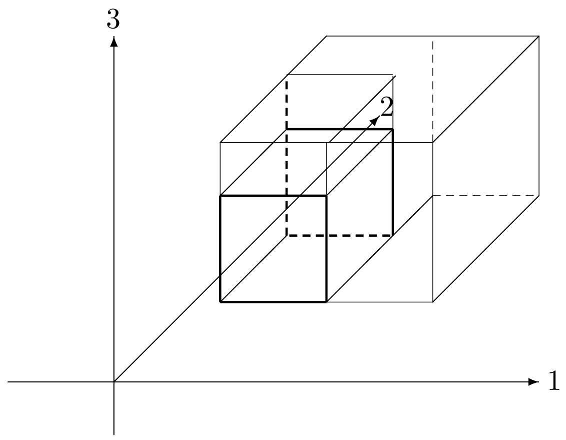
14. $\mathbb{1}_{A_1 \triangle \ldots \triangle A_n} \equiv \sup\limits_{n=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \quad (mod 2) \qquad (2)$
Daraus folgt: $A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$ besteht aus alle Elementen $x \in \Omega$, die einer ungeraden Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ angehören. Zeigen Sie dies auch direkt (ohne Formel (2)) mit Hilfe von vollständiger Induktion!

Lösung:
vollständige Induktion:
$n = 1: \quad \mathbb{1}_{A_1} \equiv \mathbb{1}_{A_1} \quad (mod 2)$ trivial
Gilt (2) für n, $\quad B_n := A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$
$\mathbb{1}_{A_1 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}} = \mathbb{1}_{B_n \triangle A_{n+1}} \equiv \mathbb{1}_{B_n} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} (mod 2)$
$\equiv \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} (mod 2) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \mathbb{1}_{A_i} (mod 2)$ $\square$ Direkt:
$n = 2: \quad A_1 \triangle A_2 = \{x : (x \in A_1 \ \wedge \ x \notin A_2) \vee (x \notin A_1 \ \wedge \ x \in A_2)\}$
x in genau einer der Mengen. Ansonsten kommen nur die ge???? Anzahlen 0 der 2 in Frage
Gilt für n: $B_n = A_1 \triangle \ldots \triangle A_n = \{x : x \in A_k$für eine ungerade Anzahl der $A_k\}$
$B_n \triangle A_{n+1} = (B_n - A_{n+1} \cup (A_{n+1} - B_n) =$
$= \{x : x \in A_x$ für eine ungerade Anzahl von $A_k \quad (k \leq n) \wedge x \notin A_{n+1}\}$
$\cup \{x : x \in A_k$ für eine gerade Anzahl von $A_k \quad (k \leq n) \ \wedge \ x \in A_{n+1}\}$
$= \{x : x \in A_k$ für eine ungerade Anzahl von $A_k \quad (k \leq n+1)\}$ $\square$

15. $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ seien nichtleere Mengen, $A_i \subseteq \Omega_i (i = 1, \ldots, n)$ Teilmengen, $\Omega := \times_{i=1}^{n} \quad \Omega_i := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$, $A := \times_{i=1}^{n} A_i$.
Dann gilt:
$$A^c := \Omega - A = \sum_{i=1}^{n} (A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_i^c \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n)$$
(Wesentlich ist die Darstellung von A^c als Vereinigung disjunkter Mengen! Bei A_i^c bezieht sich die Komplementbildung natürlich auf Ω_i-Veranschaulichen Sie sich die Gleichung anhand von Beispielen in der Ebene bzw. im dreidimensionalen Raum!)

Lösung:
$x = (x_1, \ldots, x_n) \in A^c$
$i(x) := \min\{i : x_i \notin A_i\}$
$\Rightarrow x_1 \in A_1, \ldots, x_{i-1} \in A_{i-1}, x_i \in A_i^c$
$\Rightarrow x \in \sum_{i=1}^{n} (A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_i^c \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n)$
Umgekehrt:
$x \in \sum_{i=1}^{n} (A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_i^c \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n)$
$\Rightarrow x_i \notin A_i \Rightarrow x \in A^c$ $\square$





16. Man beweise: $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$

    Beweis:

    $m \geq n: \quad \bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq \bigcup_{k \geq n} A_k \subseteq \bigcup_{k \geq m} A_k$

    $m > n: \quad \bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq A_m \subseteq \bigcup_{k \geq m} A_k$

    $\Longrightarrow \bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq \bigcup_{k \geq m} A_k \qquad \forall m \in \mathbb{N}$

    $\Rightarrow \bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} A_k = \overline{\lim} A_n \quad \forall n$

    $\Rightarrow \bigcup_{n} \bigcap_{k \geq n} A_k \subseteq \overline{\lim} A_n$ $\square$

17. Ist (A_n) eine Mengenfolge, so zeige man, dass gilt:
    $\overline{\lim} A_n = \{w : w \text{ liegt in unendlich vielen } A_n\}$

$\underline{\lim} A_n = \{w : w \text{ liegt in fast allen } A_n\}$

Beweis:
$\overline{\lim} A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$
$w \in \overline{\lim} A_n \Leftrightarrow \forall n \; \exists k : w \in A_k$
$n_1 = 1 : k_1 = \min\{k \geq n_1 : w \in A_k\},$
$n_2 = k_1 + 1, k_2 = \min\{k \geq n_2 : w \in A_k\}$
$n_j = k_{j-1} + 1, k_j = \min\{k \geq n_j : w \in A_k\}$
$\Rightarrow w \in A_{k_j} \quad \forall j \text{ mit } k_1 < k_2 < \dots \Rightarrow w \text{ in } \infty \text{ vielen } A_k$
w in ∞ vielen $A_k \Rightarrow \exists$ Teilfolge (k_j)
$w \in A_{k_j} \quad \forall j \Rightarrow \forall j \exists k_j \geq j : w \in A_{k_j}$
$\Rightarrow w \in \bigcap_j \bigcup_{k \geq j} A_k$
$(\underline{\lim} A_n)^c = \left(\bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k\right)^c = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k^c = \{w : w \text{ in } A_n^c \text{ i o}\}$
$\Longleftrightarrow (\underline{\lim} A_n) = \{w : w \text{ in fast allen } A_n\}$ □

18. Man zeige, dass für monoton wachsende Mengenfolgen gilt: $\lim A_n = \bigcup A_n$
und analog beweise man, dass aus $A_n \searrow$ folgt $\lim A_n = \bigcap A_n$.

Beweis:
$\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k \subseteq \bigcup_{k \geq n} A_k \subseteq \bigcup_{k \geq 1} A_k \dots$
$A_n \nearrow \Rightarrow \bigcap_{k \geq n} A_k = A_n \Rightarrow \underline{\lim} A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$
Somit $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \underline{\lim} A_n \geq \overline{\lim} A_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$
$\Rightarrow \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$
$A_n \searrow \Rightarrow A_n^c \nearrow \Rightarrow \overline{\lim} A_n^c = \underline{\lim} A_n^c = \bigcup A_n^c$
$\Rightarrow \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \left(\bigcup A_n^c\right)^c = \bigcap A_n$

19. Man zeige:

   a) $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$
   b) $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$

Beweis:
Sei w fest, $\big(\mathbb{1}_{A_n}(w)\big)$ ist eine Folge aus $\{0, 1\}$ (der Indikator kann nur $0 \vee 1$ annehmen)
Somit: $\underline{\lim} \mathbb{1}_{A_n}(w) \in \{0, 1\}$

Sei $\underline{\lim}\mathbb{1}_{A_n}(w) = 0 \Rightarrow \exists (i_k) : \mathbb{1}_{A_{i_k}}(w) = 0 \Rightarrow w \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{i_k}^c \Rightarrow w \notin \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \Rightarrow \mathbb{1}_{\underline{\lim}A_n}(w) = 0$

Sei $\underline{\lim}\mathbb{1}_{A_n}(w) = 1 \Rightarrow$ es gibt höchstens endlich viele n mit $\mathbb{1}_{A_n}(w) = 0 \Rightarrow \exists n_0 : \quad \forall n \geq n_0 : \mathbb{1}_{A_n}(w) = 1 \Rightarrow w$ liegt in fast allen $A_n \Rightarrow w \in \underline{\lim}A_n \Rightarrow \mathbb{1}_{\underline{\lim}A_n}(w) = 1$ □

20. Ist $\mathfrak{R} \neq \emptyset \quad (\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega))$ ein Mengensystem, für das gilt: $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A\triangle B \in \mathfrak{R} \ \wedge \ A \cap B \in \mathfrak{R}$, so ist $(\mathfrak{R}, \triangle, \cap)$ ein Ring im Sinne der Algebra.

    Beweis:

    1) $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$
    $A\triangle(B\triangle C) = A\cap[(B\cap C^c)\cup(B^c\cap C)]^c\cup[(B\cap C^c)\cup(B^c\cap C)]\cap A^c =$
    $= A \cap [(B \cap C^c)^c \cap (B^c \cap C)^c] \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) =$
    $= A \cap [B^c \cup C) \cap (B \cup C^c)] \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) =$
    $= A \cap [(B^c \cap B) \cup (B^c \cap C^c) \cup (B \cap C) \cup (C \cap C^c)] \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) =$
    $= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
    symmetrisch in $A, B, C \Rightarrow$ Beh. □
    2) $A\triangle B = B\triangle A$
    3) $A\triangle\emptyset = A$
    4) $A\triangle A = \emptyset$
    5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
    6) $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$
    Beweis:
    $A \cap (B\triangle C) = A \cap [(B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)] =$
    $= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C)$

    $(A \cap B)\triangle(A \cap C) =$
    $= [(A \cap B) \cap (A \cap C)^c] \cup [(A \cap B)^c \cap (A \cap C)] =$
    $= [(A \cap B) \cap (A^c \cup C^c)] \cup [(A^c \cup B^c) \cap (A \cap C)] =$
    $= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C)$ □
    mit Indikatoren:
    $\mathbb{1}_{A\triangle B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$
    $\mathbb{1}_{A\triangle(B\triangle C)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\triangle C} - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\triangle C} =$
    $= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) =$
    $= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C + \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C) + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$
    symmetrisch in A, B, C □

21. Sind $I_1, \ldots, I_n$ endliche Indexmengen, so gilt für beliebige Mengen $A_{i,j} \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \in I_i$:

(a)
$$\bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j \in I_i} A_{i,j} = \bigcup_{(j_1,\dots,j_n) \in X_{i=1}^{n} I_i} \bigcap_{i=1}^{n} A_{i,j_i}$$

(b)
$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j \in I_i} A_{i,j} = \bigcap_{(j_1,\dots,j_n) \in X_{i=1}^{n} I_i} \bigcup_{i=1}^{n} A_{i,j_i}$$

Beweis:

(a) $w \in \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j \in I_i} A_{i,j} \Leftrightarrow \forall i \exists j_i \in I_i : w \in A_{i,j_i}$

$\Leftrightarrow \exists (j_1, \dots, j_n) \in X_{i=1}^{n} I_i : w \in \bigcap_{i=1}^{n} A_{i,j_i}$

$\Leftrightarrow w \in \bigcup_{(j_1,\dots,j_n) \in X_{i=1}^{n} I_i} \bigcap_{i=1}^{n} A_{i,j_i}$

(b) de Morgan

22. Man beweise:

(a) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$
(b) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(c) $A \triangle B = B \triangle A$
(d) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$
(e) $A \triangle A = \emptyset$
(f) $A \triangle A^c = \Omega$

Beweis:

(a) $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ symmetrisch in A, B und A^c, B^c
(b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cap (A \cap B)^c) \cup (B \cap (A \cap B)^c) =$
$(A \cap (A^c \cup B^c)) \cup (B \cap (A^c \cup B^c)) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
(c) trivial
(d) $A \triangle (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup \underbrace{((A \cap B) \setminus A)}_{\emptyset} = A \cap (A \cap B)^c =$
$= A \cap (A^c \cup B^c) = A \cap B^c$
(e) $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$
(f) $A \triangle A^c = (A \cup A^c) \setminus (A \cap A^c) = \Omega \setminus \emptyset = \Omega$

23. I, J, Ω seien nichtleer, $A_{i,j} \subseteq \Omega \quad \forall i \in I, j \in J$
$\Rightarrow \bigcap\limits_{j \in J} X_{i \in I} A_{i,j} = X_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J} A_{i,j}$

Beweis:
$x \in \bigcap\limits_{j \in J} X_{i \in I} A_{i,j} \Leftrightarrow x = (x_i)_{i \in I} : x_i \in A_{i,j} \quad \forall j$
$\Leftrightarrow x_i \in \bigcap\limits_{j} A_{i,j} \Leftrightarrow x = (x_i) \in X_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J} A_{i,j}$ $\square$

1.7 Zerlegungen

1. Man zeige, dass die Jordan-Zerlegung μ^+, μ^- eines signierten Maßes μ minimal im folgenden Sinn ist: Gilt $\mu = \nu_1 - \nu_2$ für 2 Maße ν_1 und ν_2, so folgt daraus: $\mu^+ \leq \nu_1$ und $\mu^- \leq \nu_2$

   Lösung:

   (P, N) haben Zerlegung zu μ^+, μ^-
   $\nu_1(A) \geq \nu_1(A \cap P) \geq \nu_1(A \cap P) - \nu_2(A \cap P) = \mu(A \cap P) = \mu^+(A \cap P) = \mu^+(A)$
   $\nu_2(A) \geq \nu_2(A \cap N) \geq \nu_2(A \cap N) - \nu_1(A \cap N) = -\mu(A \cap N) = \mu^-(A \cap N) = \mu^-(A)$

2. Sei λ das Lebesgue-Maß und $\mu = \mu_C + \mu_S$ ein signiertes Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit der Lebesgue-Zerlegung $\mu_C \ll \lambda, \mu_S \perp \lambda$. Man zeige:

   (a) μ_S ist λ-fü differenzierbar mit $D\mu_S = 0 \quad \lambda$-fü.

   (b) $\mu_C(A) - q\lambda(A) \leq \nu(A), \quad \forall A \in \mathfrak{B}, \quad \forall q \in \mathbb{Q}$ mit
   $$\nu(A) := \int_{A \cap \left[\frac{d\mu_C}{d\lambda} \geq q\right]} \left(\frac{d\mu_C}{d\lambda} - q\right) d\lambda$$

   (c) $\overline{D}\mu_C \leq q + \overline{D}\nu, \quad \lambda$-fü

   (d) $\overline{D}\mu_C \leq q \quad \lambda$-fü auf $\left[\frac{d\mu_C}{d\lambda} < q\right]$

   (e) $\lambda\left(\left[\frac{d\mu_C}{d\lambda} < q < \overline{D}\mu_C\right]\right) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{Q}$

   (f) $\lambda\left(\left[\frac{d\mu_C}{d\lambda} < \overline{D}\mu_C\right]\right) = 0$

   (g) $\lambda\left(\left[\frac{d\mu_C}{d\lambda} > \underline{D}\mu_C\right]\right) = 0$

   (h) $\frac{d\mu_C}{d\lambda} = D\mu_C = D\mu, \quad \lambda$-fü

   (Hinweis: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass aus $\mu(A) = 0$ folgt: μ ist auf A λ-fü differenzierbar mit $D_\mu = 0$ λ-fü auf A.
   Wenn man in (b)-(f) μ durch $-\mu$ ersetzt, sollte (g) sehr einfach sein.)

   Lösung:

   Wegen $D(-\mu) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathfrak{C}_{\frac{1}{n}}} \frac{-\mu(C)}{\lambda(C)} = -\lim_n \inf_{\mathfrak{C}_{\frac{1}{n}}} \frac{\mu(C)}{\lambda(C)} = -\underline{D}\mu$ und $\frac{d(-\mu_C)}{d\lambda} = -\frac{d\mu_C}{d\lambda}$, ergibt (1) angewendet auf $-\mu$:
   $$\lambda\left(\left[\overline{D}(-\mu) > \frac{d[-\mu_C)}{d\lambda}\right)\right) = \lambda\left(\left[\underline{D}\mu < \frac{d\mu_C}{d\lambda}\right]\right) = 0$$

Somit genügt es, (1) zu beweisen.

$$\text{Da } [\overline{D}\mu > \frac{d\mu_C}{d\lambda}] = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}} [\frac{d\mu_C}{d\lambda} < a < \overline{D}\mu],$$

reicht es aus $\lambda\big(\big[\frac{d\mu_C}{d\lambda} < a < \overline{D}\mu\big]\big) = 0$ zu zeigen.
Sei $A := \big[\frac{d\mu_C}{d\lambda} < a\big]$

$$\nu(B) := \int_{B\cap\big[\frac{d\mu_C}{d\lambda}\geq a\big]} \big(\frac{d\mu_C}{d\lambda} - a\big) d\lambda$$

Wegen $\nu(A) = 0$ folgt aus Satz (S201)
$\overline{D}\nu = 0$ λ-fü auf A
Nun gilt:

$$\mu_C(C) - a\lambda(C) = \int_C \big(\frac{d\mu_C}{d\lambda} - a\big) d\lambda \leq \int_{C\cap\big[\frac{d\mu_C}{d\lambda}\geq a\big]} \big(\frac{d\mu_C}{d\lambda} - a\big) d\lambda = \nu(C) \quad \forall C \in \mathfrak{B}$$

$\Rightarrow \frac{\mu_C(C)}{\lambda(C)} \leq a + \frac{\nu(C)}{\lambda(C)} \quad \forall C \in \mathfrak{C}_{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \overline{D}\mu_C \leq a + \overline{D}\nu \quad \lambda$-fü

Damit gilt aber $\overline{D}\mu_C \leq a \quad \lambda$-fü auf A
$\Rightarrow \lambda\big(\big[\frac{d\mu_C}{d\lambda} < a < \overline{D}\mu_C\big]\big) = 0$

Wegen Satz (S200) gilt aber auch $\overline{D}\mu_S = 0$ λ-fü
$\Rightarrow \overline{D}\mu_S = \overline{D}\mu + \overline{D}\mu_C \Rightarrow \lambda\big(\big[\frac{d\mu_S}{d\lambda} < a < \overline{D}\mu\big]\big) = 0$

1.8 Anwendung: Satz von Fubini

1. Sind $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i) \quad i = 1, 2$ zwei σ-endliche Maßräume, so zeige man, dass aus $\nu_i \ll \mu_i \quad i = 1, 2$ folgt: $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$, und dass dann gilt:
$$\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1} \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}$$
Lösung:

   Nach dem Satz von Fubini ist
$$\rho(A \times B) := \int_{A \times B} \tfrac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \tfrac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x, y)$$
$$= \int_A \int_B \tfrac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \tfrac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d\mu_2(y) d\mu_1(x)$$
$$= \nu_1(A)\nu_2(B) = \nu_1 \otimes \nu_2(A \times B)$$
Also stimmt das Maß ρ für messbare Rechtecke $A \times B$ mit dem Produktmaß überein und wegen des Fortsetzungssatzes gilt daher $\rho = \nu_1 \otimes \nu_2$. Daher ist der Integrand $\frac{d\nu_1}{d\mu_1} \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}$ die Radon-Nikodym-Ableitung von $\nu_1 \otimes \nu_2$, d.h. $\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1} \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}$
Die absolute Stetigkeit folgt aus der Integraldarstellung und braucht nicht extra gezeigt werden.

2. Man zeige, dass
$$\lim_{M \to \infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$
(Hinweis: Verwende den Satz von Fubini und die Relation
$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt, \quad x > 0.)$$
Lösung:

$$\Big(\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b\cos bx)\Big)$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x &= -\cos x, \quad \int \cos x = \sin x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \\
\int_0^M \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^M (\sin x \int_0^\infty e^{-xt} dt) dx = \int_0^\infty \Big[\int_0^M \sin x . e^{-xt} dx \Big] dt \\
&= \int_0^\infty \Big[\frac{e^{-tx}}{1+t^2}(-t \sin x - \cos x)\Big|_0^M \Big] dt = \\
&= \int_0^\infty \Big[\frac{1}{1+t^2} - \frac{e^{-tM}}{1+t^2}(t \sin M + \cos M) \Big] dt \xrightarrow{M \to \infty} \\
\to & \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

1.9 Stetigkeit von oben

1. Bei der Definition der Stetigkeit von oben ist die Endlichkeitsbedingung unerläßlich, wenn die Aussagen von Satz 3.7 gelten sollen.

   Lg:
   $\Omega = [0, 1] \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra
   $\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ \infty, & A \text{ überabzählbar} \end{cases}$ Ist Maß.
   $\forall x \in \Omega$ gilt $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad A_n \searrow$
   $0 = \mu\{x\} \neq \infty = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

2 Dichte- & Verteilungsfunktion

2.1 Verteilungsfunktion

1. Man zeige, dass

$$F(x_1,\dots,x_m) := \min(x_1,\dots,x_m)$$

eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}^m$ ist.
(Hinweis: Angenommen, es gilt o.E.d.A. $a_m = \max(a_1,\dots,a_m)$, dann gilt für alle x_j und $a_i \le b_i$:

$$\begin{aligned} & \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}) \\ = & \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}, a_m) \\ = & \min(x_1^{i-1}, a_i, x_{i+1}^{m-1}, b_m) \end{aligned}$$

mit $x_i^k := (x_i,\dots,x_k), \quad i \le k$. Damit sollte man die Aussage aus der expliziten Gestalt von F folgern können.)
Lg:

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} F &= \textstyle\sum_{\epsilon_1^{m-1}} (-1)^{\sum_{i=1}^m \epsilon_i} (F(\epsilon_1^{m-1} a_1^{m-1} + (1-\epsilon_1^{n-1}) b_1^{m-1}, b_m) \\ &- F(\epsilon_1^{m-1} a_1^{m-1} + (1-\epsilon_1^{m-1}) b_1^{m-1}, a_m)) \\ \textstyle\sum &= 0 \quad \forall \epsilon_1^{m-1} \neq 0 \end{aligned}$$

für $\epsilon_1^{m-1} = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} & F(b_1,\dots,b_m) - F(b_1,\dots,b_{m-1},a_m) = \\ &= \begin{cases} \min\limits_{1\le i\le m} b_i - a_m = \min b_i - \max a_i, & \text{falls } a_m \le \min\limits_{1\le i\le m-1} b_i \\ \min\limits_{1\le i\le m} b_i - \min\limits_{1\le i\le m-1} b_j \ge 0, & \text{falls } a_n > \min\limits_{1\le i\le m-1} b_i \end{cases} \end{aligned}$$

2. Man zeige, dass

   (a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ mit

$$F(x,y) := \begin{cases} 0, & x<0 \vee y<0 \\ y^n - (y-x)^n, & 0 \le x \le y \le 1 \\ y^n, & 0 \le y \le 1 \ \wedge \ y \le x \\ 1-(1-x)^n, & 0 \le x \le 1, y > 1 \\ 1, & 1 \le x, y \end{cases}$$

   eine 2-dimensionale Verteilungsfunktion (im eigentlichen Sinn) ist.
   (Hinweis: Wenn Sie F als Integral einer nichtnegativen Funktion darstellen ist alles klar!)

   (b) Ist $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion, so ist

$$\widetilde{F}(x,y) := \begin{cases} f(y)^n - (f(y)-f(x))^n, & x \le y \\ f(y)^n, & x > y \end{cases}$$

   eine 2-dimensionale Verteilungsfunktion auf $([0,1]^2, \mathcal{B})$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= \begin{cases} ny^{n-1} - n(y-x)^{n-1}, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ ny^{n-1}, & 0 \leq y \leq 1, y \leq x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
\frac{\partial F}{\partial y \partial x} &= \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2}, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$P((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial F}{\partial y \partial x} dx dy \geq 0$$

(b) $\vec{a} \leq \vec{b} \Rightarrow f(\vec{a}) \leq f(\vec{b})$ und aus a) folgt $0 \leq \Delta_{f(\vec{a})}^{f(\vec{b})} F = \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} \widetilde{F}$

3. Man zeige, dass $F(x, y) := (1 - e^{-x-y}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x, y)$ keine zweidimensionale Verteilungsfunktion sein kann.

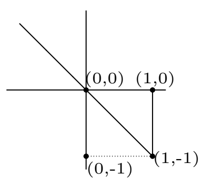
Lg:
Wir wählen einen Punkt aus: $a_1 = a_2 = 0, b_1 = b_2 = 1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0) \\
&= 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} - 1 + e^{-1} + 1 - e^0 \\
&= \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} - 1 \\
&= -0.3995764009
\end{aligned}$$

F ist keine zweidimensionale Verteilungsfunktion.

4. Man zeige, daß eine in jeder Argumentvariable monoton wachsende Funktion keine Verteilungsfunktion sein muss.

Lösung:
Gegenbeispiel:



$$\begin{aligned}
F(x, y) &:= \begin{cases} 1, & x + y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
\Delta_{(0,-1)}^{(1,0)} F &= \mu((0,1] \times (-1,0]) = -1
\end{aligned}$$

5. Stellen Sie die Verteilungsfunktion F mit

$$\begin{aligned} F(x) &= 0.\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x) + \frac{x}{2}.\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \frac{3}{4}.\mathbb{1}_{[1,2)}(x) \\ &\quad + \frac{x+1}{4}.\mathbb{1}_{[2,3)}(x) + 1.\mathbb{1}_{[3,\infty)}(x) \end{aligned}$$

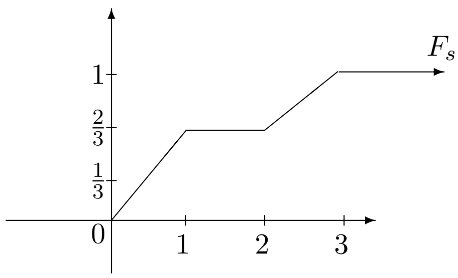
dar als Mischung einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einer Verteilung mit stetiger Verteilungsfunktion.

Lösung:

$$\mathbb{P}_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2) \ \wedge \ x \in [3,\infty) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbb{P}_S$ ist gegeben durch $F(x) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}_D + \dfrac{3}{4}\mathbb{P}_S$

$$P_S := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{2x}{3}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{x+1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{x+1}{3}, & 2 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$



2.2 Cantorsche Menge

1. Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definiert durch:

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i/2}{2^i}, & x \in C \\ \sup\{F(y) : y \leq x, y \in C\}, & x \in [0,1] \setminus C \\ 1, & x \geq 1 \quad , \end{cases}$$

wobei $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$ eine triadische Darstellung von x ohne Eins und C die Cantorsche Menge ist. Man zeige :

(a) F ist monoton wachsend.

(b) $F(C) = [0,1]$.

(c) F ist stetig.

(d) F ist auf $\mathbb{R} \setminus C$ differenzierbar mit $F'(x) = 0$.

(e) $\mu_F(C) = 1 \quad \wedge \quad \mu_F(\mathbb{R} \setminus C) = 0$.

Lg:

(a) Sei $x < y \in C \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \ \wedge \ y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$
$k = \min\{i : x_i < y_i\}$
Wegen $x_i, y_i \in \{0,2\} \to x_k = 0, y_k = 2 \to$

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2^i}{x_i} + \sum_{k+1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \\ &\leq \sum \frac{x_i}{2^i} + \frac{1}{2^k} \\ &\leq \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{x_i}{2^i}}_{= \sum \frac{y_i}{2^i}} + \frac{1}{2^k} + 0 + \cdots \\ &\leq \sum \frac{y_i}{2^k} \end{aligned}$$

(b) Jedes $x \in [0,1]$ hat eine Darstellung
$x = \sum \frac{x_i}{2^i} \Rightarrow x = F(y)$ mit $y_i = 2x_i$ und $y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i}$

(c) $x \in C^c \Rightarrow \exists > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : (x - \delta, x + \delta) \in I_{n,k}$ mit
$C^c = \bigcup_n \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} \to F(x - \delta) = F(x) = F(x + \delta)$

$(I_{1,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ I_{2,1} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}),\ I_{2,2} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}))$
$x \in C : F(x) = 1 \to x = 1 \to F(x+h) = 1\ \forall h > 0.$
Sei

$$\begin{aligned} \epsilon > 0 : \quad & F(x) - \epsilon < 1 \\ \to \quad & \exists y < x : F(y) = F(x) - \epsilon \\ \to \quad & \forall \beta \in (y, x) \text{ gilt } |F(\beta) - F(x)| < \epsilon \end{aligned}$$

Sei $F(x) \in (0,1), \epsilon > 0 : 0 \leq F(x) - \epsilon < F(x) + \epsilon \leq 1$
suche $y_i : F(y_1) = F(x) - \epsilon, F(y_2) = F(x) + \epsilon$
$\forall z \in (y_1, y_2) : |F(x) - F(z)| < \epsilon \to F$ stetig.

(d) siehe c): $\dfrac{F(x) - F(x-y)}{y} = 0, \forall x \in I_{n,k} \forall k, n$

(e) $\mu_F((R)) = 1$ klar.
Aus d) $\to \mu_F(I_{n,k}) = 0\ \forall_{n,k} \to \mu_F(C^c) = 0$ □

2.3 Berechnen der Verteilungsfunktion

1. Eine stetige Zufallsvariable ξ mit Werten in $[0,\infty)$ besitze die Dichte $f(x) = ax^2e^{-kx}$, $0 \le x \le \infty$ und $k > 0$. Man berechne den Koeffizienten a, die Verteilungsfunktion F und die Wahrscheinlichkeit für das Intervall $(0, \frac{1}{k})$.

   Hinweis: Für die Dichte gilt: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

   Lösung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(ax^2e^{-kx}dx\right) = 1$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left(ax^2e^{-kx}dx\right) &= a\left[x^2 \cdot \left(-\frac{e^{-kx}}{k}\right)\Big|_0^\infty + \frac{2}{k}\int_0^\infty \left(xe^{-kx}dx\right)\right] \\
&= a\left[x^2 \cdot \left(-\frac{1}{ke^{kx}}\right)\Big|_0^\infty + \right. \\
&\quad \left. \frac{2}{k}\left\{x \cdot \left(-\frac{1}{ke^{kx}}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{k}\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^{kx}}dx\right)\right\}\right] \\
&= a\left[x^2 \cdot \left(-\frac{1}{ke^{kx}}\right)\Big|_0^\infty + \right. \\
&\quad \left. +\frac{2}{k}\left\{x \cdot (-\frac{1}{ke^{-kx}})\Big|_0^\infty - \frac{1}{k^2e^{kx}}\Big|_0^\infty\right\}\right] \\
&\quad \underbrace{-\frac{ax^2}{ke^{kx}}\Big|_0^\infty}_{=0} \underbrace{-\frac{2ax}{k^2e^{kx}}\Big|_0^\infty}_{=0} - \frac{2a}{k^3e^{kx}}\Big|_0^\infty = \frac{2a}{k^3} \\
&\Rightarrow \quad a = \frac{k^3}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x f(t)dt = \frac{k^3}{2}\int_0^x \left(t^2 e^{-kt}dt\right) = \\
&= \frac{k^3}{2}\left[-\frac{t^2}{ke^{kt}}\bigg|_0^x + \frac{2}{k}\left\{-\frac{t}{ke^{kt}}\bigg|_0^x - \frac{1}{k^2e^{kt}}\bigg|_0^x\right\}\right] = \\
&= \frac{k^3}{2}\left[-\frac{t^2}{ke^{kt}}\bigg|_0^x - \frac{2t}{k^2e^{kt}}\bigg|_0^x - \frac{2}{k^3e^{kt}}\bigg|_0^x\right] = \\
&= -\frac{k^2t^2}{2e^{kt}}\bigg|_0^x - \frac{kt}{e^{kt}}\bigg|_0^x - \frac{1}{e^{kt}}\bigg|_0^x = \\
&= -\frac{k^2x^2}{2e^{kx}} - \frac{kx}{e^{kx}} - \frac{1}{e^{kx}} + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi < \frac{1}{k}) &= F\left(\frac{1}{k} - 0\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) \{F \text{ ist klarerweise stetig}\} \Rightarrow \\
F(\frac{1}{k}) &= -\frac{k^2 \cdot \frac{1}{k^2}}{2e^{k\frac{1}{k}}} - \frac{k \cdot \frac{1}{k}}{e^1} - \frac{1}{e^1} + 1 = 1 - \frac{5}{2e} = 0.0803013971 \\
\mathbb{P}(\xi < \frac{1}{k}) &= 0.0803013971
\end{aligned}
$$

2. Eine Zufallsvariable X besitze die Dichte $f(x) = ce^{-\lambda|x|}$ $x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Man bestimme die Konstante c und die Verteilungsfunktion von X. Hinweis: Erinnern Sie sich: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

   Lg:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-\lambda|x|}dx &= 2c\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\lambda}{2} \\
F(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda t}dt \\
F(x) &= \begin{cases} \frac{e^{\lambda x}}{2} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{2} & x > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

3. Eine Zufallsvariable besitzt die Dichte $f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}},\ x \geq b > 0$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion.

Lg:

$$
\begin{aligned}
F(X) &= \int_b^x \frac{ab^a}{t^{a+1}} dt = ab^a \int_b^x \frac{1}{t^{a+1}} dt \\
&= 1 - b^a x^{-a} = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a
\end{aligned}
$$

2.4 mon.st.Funtkion, Sprungfunktion, Unstetigkeitsstellen

1. Gibt es eine monotone $\nearrow$ Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$?

   Lg:
   f monoton $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \exists f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$
   angenommen $f(x+) > f(x) \Rightarrow (f(x), (f(x+)) \nsubseteq f(\mathbb{R}) \Rightarrow f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
   Analog folgt $f(x-) < f(x)$.
   Somit ist f stetig.
   Sei $q \in \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N} : r_n \in \mathbb{R} : q > f(r_n) > q - \frac{1}{n}$
   Sei $f(s) > q \Rightarrow \forall n : r_n \leq s$
   $\hat{r}_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} r_i \nearrow \ \wedge\ \hat{r}_n \leq s \Rightarrow \exists \lim \hat{r}_n = r$
   $\wedge\ f(r) = \lim f(r_n) = q - \lim \dfrac{1}{n} = q$

2. Def: Eine Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Sprungfunktion, wenn es eine höchstens abzählbare Menge $J \leq \mathbb{R}$ gibt, eine Funktion $p : J \to (0, \infty)$ mit $\displaystyle\sum_{x \in J \cap [-n,n]} p(x) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$G(x) = \begin{cases} c + \displaystyle\sum_{y \in J \cap (0,x]} p(y), & x > 0 \\ c - \displaystyle\sum_{y \in J \cap (x,0]} p(y), & x \leq 0. \end{cases}$$

   Ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rechtsstetig und monoton nichtfallend, so existiert eine stetige, monoton nichtfallende Funktion H und eine ebenfalls nichtfallende Sprunkfunktion $G : F = H + G$. G und H sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

   Lg:
   $J := \{x : F(x) > F(x-)\} = \{x_1, x_2, \dots\}$
   $p : J \Rightarrow (0, \infty) : p(x_i) := F(x_i) - F(x_i-)$

$$G(x) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in (0,x] \cap J} p(x_i), & x > 0 \\ \displaystyle\sum_{x_i \in J \cap (x,0]} p(x_i), & x \leq 0. \end{cases}$$

   Wegen $\sum_{x_i \in J \cap [-n,n]} p(x) \leq F(n) - F(-n)$ (siehe voriges Bsp.) ist G Sprungfunktion.
   Weiters gilt:

$$x < y \Rightarrow G(y) - G(x) = \sum_{x_i \in J \cap (x,y]} p(x_i) \leq F(y) - F8x)$$

(siehe voriges Bsp.).
Somit gilt:

$$H(y) := F(y) - G(y) \geq F8x) - G(x) = H(x).$$

Aus

$$\begin{aligned}
G(x) - G(x-h) &\leq F(x) - F(x-h) \Rightarrow 0 \\
&\leq \lim_{h \searrow 0} G(x) - G(x-h) \\
&\leq \lim_{h \searrow 0} F(x) - F(x-h) \quad \forall x. \\
&\Longrightarrow \lim_{h \searrow 0} G(x) - G(x-h) = 0 \quad \forall x \in J.
\end{aligned}$$

Für x_i aus J gilt aber

$$\begin{aligned}
\lim(F(x_i) - F(x_i - h)) &= p(x_i) \\
&\leq \sum_{x_i \in J \cap (x_i - h, x_i]} p(x_i) = G(x_i) - G(x_i - h).
\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}
& \lim(F(x) - F(x-h)) = \\
= \; & \lim(G(x) - G(x-h)) \quad \forall x \\
\Rightarrow \; & \lim_{h \searrow 0}(H(x) - H(x-h)) \\
= \; & \lim(F(x) - G(x) - F(x-h) + G(x-h)) \\
= \; & \lim F(x) - F(x-h) - \lim G(x) - G(x-h) \\
= \; & 0 \Rightarrow H \text{ ist stetig (Rechtsstetigkeit ist klar)}
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
F &= H_1 + G_1 \\
&= H_2 + G_2, \quad H_i \text{ ist stetig,} \\
& \qquad\qquad\quad G_i \text{ Sprungfunktion,} \\
&\Rightarrow H_1 - H_2 \\
&= G_2 - G_1
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
G_i(x) &= c_i \pm \sum_{y \in J_i \cap (0,x]} p_i(y) \\
&\Rightarrow (H_1 - H_2)(x) - (H_1 - H_2)(x-h) \\
&= (G_2 - G_1)(x) - (G_2 - G_1)(x-h) \\
&\Rightarrow 0 \\
&= \lim_{h \searrow 0}(H_1 - H_2)(x) - (H_1 - H_2)(x-h) \\
&= p_2(x) - p_1(x) \quad \forall x \in J_1 \cup J_2 \\
&\Rightarrow p_1 = p_2 \\
&\Rightarrow G_2 = G_1 + (c_2 + c_1) \\
&\Rightarrow H_1 - H_2 = c_2 - c_1
\end{aligned}$$

3. Man zeige, dass jede monotone Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat und daß $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x-h) := \lim_{h \searrow 0} f(x-h) \leq f(x) \leq f(x+h) = \lim_{h \searrow 0} f(x+h)$$

Lg:

$$f(x-h) \leq f(x) \leq f(x+h) \quad h > 0$$

$$h_1 < h_2 \Rightarrow f(x+h_1) \leq f(x+h_2) \Rightarrow \exists \lim f(x+h) \geq f(x)$$

analog für $f(x-)$

$$\begin{array}{rcl} \text{Sei } J_n & := & \{x \in [-n,n] : f(x+) - f(x-) > \frac{1}{n}\} \\ & \Rightarrow & |J_n| \\ & \leq & \frac{f(n)-f(-n)}{\frac{1}{n}} \\ & = & n(f(n) - f(-n)) \\ & < & \infty \\ J & := & \{x : f(x+) \neq f(x-)\} \\ & = & \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} J_n \\ & \Rightarrow & |J| \\ & \leq & \aleph_0 \end{array}$$

4. Ist J die Menge der Unstetigkeitsstellen, so zeige man, daß

$$x < y \Rightarrow \sum_{x_j \in J \cap (x,y)} f(x_i+) - f(x_i-) \leq f(y) - f(x)$$

Lg:
Sei (x_{i_j}) die Teilfolge von J in (x,y). Betrachte $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Sei

$$h < \min \frac{\{|x_{i_j} - x_{i_k}|, j \neq k, |x - x_{i_j}|, |y - x_{i_j}|\}}{2}.$$

Sei o.E.d.A. angenommen daß $x < x_{i_1} < \cdots < x_{i_n} < y$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} x_{i_j} + h & < & x_{i_{j+1}} - h \\ & \Rightarrow & f(x_{i_j} + h) - f(x_{i_j} - h) \\ & \leq & 0 \quad \forall j; \\ & \Rightarrow & \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_{i_j}+) - f(x_{i_j}-) \\ & \leq & \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_{i_j} + h) - f(x_{i_j} - h) \\ & \leq & f(x_{i_n} + h) - f(x_{i_1} - h) \\ & \leq & f(y) - f(x). \end{array}$$

Da $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} f(x_{i_j}+) - f(x_{i_j}-) &\leq f(y) - f(x) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} f(x_{i_j}+) - f x_{i_j}-) &\leq f(y) - f(x). \end{aligned}$$

2.5 Verteilungsfunktion & Lebesgue-Stieltjes-Maß

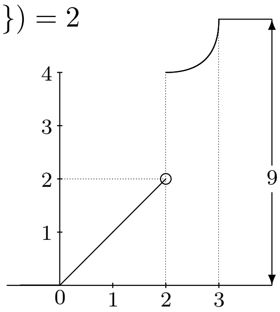
1. Die Funktion F auf $\mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \\ x^2, & 2 \leq x < 3 \\ 9, & x \geq 3 \end{cases}$$

   (a) Man zeige, daß F eine Verteilungsfunktion ist.

   (b) Man bestimme: $\mu_F(\mathbb{Q}), \mu_F((0,2)), \mu_F(\{2\})$ und $\mu_F(\mathbb{R})$.

   Lösung:
   $\mu_F(\mathbb{R}) = 9, \mu_F((0,2)) = 2$
   $\mu_F(\mathbb{Q}) = \mu_F(\{2\}) = 2$

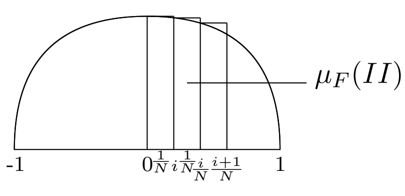


2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Funktion F gegeben durch

$$F(x,y) = \begin{cases} xy^2, & y \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   Man zeige, daß F eine Verteilungsfunktion ist und bestimme das Maß μ_F des Einheitskreises.

   Lösung:



$$OS = 4\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{N}\left(1 - \left(\frac{i}{N}\right)^2\right) = 4\int_0^1 (1-x^2)dx = 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned}\mu_F(\Pi) &= F\left(\frac{i+1}{N}, \sqrt{1-\left(\frac{i}{N}\right)^2}\right) \\ &\quad - F\left(\frac{i}{N}, \sqrt{1-\left(\frac{i}{N}\right)^2}\right) \\ &= \frac{1}{N}\left(1-\left(\frac{i}{N}\right)^2\right)\end{aligned}$$

3. Wenn μ_F ein L-S-Maß mit stetiger Verteilungsfunktion F ist, muss dann jedes $A \in L$ mit $\mu_F(A) > 0$ eine nichtleere offene Teilmenge enthalten?

   Lg:
   Nein! Sei F die Cantorsche Funktion: Klarerweise gilt $\mu_F(C) = 1$ und C ist nirgends dicht, dh. $\forall (a,b) \neq \emptyset : (a,b) \cap C^c \neq \emptyset \Rightarrow (a,b) \nsubseteq C$

4. Man überprüfe die folgenden Aussagen, wenn μ_F ein L-S-Maß mit stetiger Verteilungsfunktion F ist.

   (a) $|A| \leq \aleph_0 \Rightarrow \mu_F(A) = 0$
   (b) $\mu_F(A) > 0 \Rightarrow \exists (a,b) \neq \emptyset : (a,b) \subseteq A$
   (c) $\mu_F(A) > 0 \ \wedge \ \mu_F(A^c) = 0 \Rightarrow A$ ist dicht in $\mathbb{R}$
   (d) c) gilt für das Lebesgue-Maß λ

   Lg:

   (a) $A = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$; $A \subset \bigcup_n (w_n - \delta_n, w_n]$ mit

   $$\delta_n : |F(w_n) - F(w_n - \delta_n)| < \tfrac{\epsilon}{2^n} \quad \epsilon > 0$$
   $$\Rightarrow \mu_F(A) \leq \sum_n \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \Rightarrow \mu_F(A) = 0$$

   (b) Gegenbsp.: $\mu_F = \lambda, A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
   $(a,b) \neq \emptyset \Rightarrow (a,b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \Rightarrow (a,b) \nsubseteq A$
   $\lambda(A) = \infty$

   (c) $F(x) := x\mathbb{1}_{(0,1]} + \mathbb{1}_{(1,\infty)} \Rightarrow \mu_F((0,1]) = 1, \quad \mu_F((0,1]^c) = 0$
   $(0,1]$ nicht dicht in $\mathbb{R}$

   (d) Sei $\lambda(A) > 0, \lambda(A^c) = 0$,
   angenommen A nicht dicht $\Rightarrow \bar{A} \neq \mathbb{R} \Rightarrow \bar{A}^c \neq \emptyset, \bar{A}^c$ ist offen.
   Sei $x \in \bar{A}^c \Rightarrow \exists (a,b) \subseteq \bar{A}^c : x \in (a,b) \subseteq \bar{A}^c \Rightarrow$
   $\Rightarrow \lambda(\bar{A}^c) \geq \lambda(a,b) > 0$.
   Aber $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A}^c \subseteq A^c \Rightarrow \lambda(A^c) > 0$ Widerspruch!!!

5. Man zeige, dass für die Stetigkeitspunkte x der Verteilungsfunktion F eines Lebesgue-Stieltjes-Maßes μ gilt: Ist μ in x differenzierbar, so ist auf F in x differenzierbar und es gilt: $D\mu(x) = F'(x)$. Daraus leite man den Satz von Lebesgue ab, dass eine auf $[a, b]$ monoton wachsende Funktion F λ-fü differenzierbar ist und dass gilt:

$$F(b) - F(a) \geq \int_{[a,b]} F' d\lambda$$

mit Gleichheit genau dann, wenn F absolut stetig ist.

Lösung:
Aus Satz (S202) folgt bereits, dass $D\mu$ λ-fü existiert und $D\mu = \frac{d\mu_C}{d\lambda}$ λ-fü.
Da F monoton ist, hat es nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, ist also stetig λ-fü.
Sei x_0 ein Stetigkeitspunkt von F, für den $D\mu < (x_0) = c$ existiert.
Aus der Definition von von $D\mu(x)$ folgt, dass $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \forall n$ mit
$\left|\frac{\mu(C)}{\lambda(C)} - c\right| < \epsilon \quad \forall$ offenen Intervallen C mit $x_0 \in C$
$\lambda(C) < \frac{1}{n}$. Sei $x_0 < y$ mit $|x_0 - y| < \frac{1}{n_\epsilon}$
Sei $C_{m,k} = (x_0 - \frac{1}{m}, y + \frac{1}{k})$, wobei $m \geq m_\epsilon, k \geq k_\epsilon$ mit m_ϵ, k_ϵ so, dass $\lambda(x_0 - \frac{1}{m_\epsilon}, y + \frac{1}{k_\epsilon}) < \frac{1}{n_\epsilon}$
Somit gilt $\left|\frac{\mu((x_0 - \frac{1}{m}, y + \frac{1}{k}))}{y - x_0 + \frac{1}{m} + \frac{1}{k}} - c\right| < \epsilon \forall k \geq k_\epsilon, m \geq m_\epsilon$
Nun gilt $\displaystyle\bigcap_{k \geq k_\epsilon} (x_0 - \frac{1}{m}, y + \frac{1}{k}) = (x_0 - \frac{1}{m}, y] \quad \forall m$
Daher muss gelten:

$$\left|\frac{\mu((x_0 - \frac{1}{m}, y])}{y - x_0 + \frac{1}{m}} - c\right| < \epsilon \quad \forall m \geq m_\epsilon$$

Das ist gleichbedeutend mit:

$$\left|\frac{F(y) - F(x_0 - \frac{1}{m}}{y - x_0 + \frac{1}{m}} - c\right| < \epsilon \quad \forall m \geq m_\epsilon$$

Da F in x_0 stetig ist, folgt daraus:

$$\left|\frac{F(y) - F(x_0)}{y - x_0} - c\right| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

Dies bedeutet aber, dass die rechtsseitige Ableitung von F in x_0 mit $D\mu(x_0)$ übereinstimmt.
Wählt man andererseits ein $y < x_0$ mit $x_0 - y < \frac{1}{n_\epsilon}$ und k_ϵ so groß, dass $\lambda((y, x_0 + \frac{1}{k_\epsilon})) < \frac{1}{n_\epsilon}$, so gilt auch:

$$\left|\frac{\mu((y, x_0 + \frac{1}{k}))}{x_0 - y + \frac{1}{k}} - c\right| < \epsilon \quad \forall k \geq k_\epsilon$$

$$\text{Somit } \left| \frac{\mu((y,x_0])}{x_0 - y} - c \right| = \left| \frac{F(x_0) - F(y)}{x_0 - y} - c \right| < \epsilon$$

Demnach stimmt auch die linksseitige Ableitung von F mit $D\mu(x_0)$ überein.
Somit $F'(x_0) = D\mu(x_0) = \frac{d\mu_C}{d\lambda}(x_0)$

Folgerung: (Satz von Lebesgue)
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, so ist f λ-fü differenzierbar.
Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, so ist F λ-fü differenzierbar und es gilt:

$$F(b) - F(a) \geq \int_{[a,b]} F'(t) d\lambda(t) \ldots (1)$$

Beweis:

$f = F - G$ mit $F \nearrow, G \nearrow$ $\quad F, G$ stimmen λ-fü mit rechtsstetigen Funktionen überein.
Somit gilt wegen des vorigen Satzes $f' = F' - G'$
Ist F monoton, folgt wieder aus dem vorigen Satz:

$$\int_{[a,b]} F' d\lambda = \int_{[a,b]} \frac{d\mu_C}{d\lambda} d\lambda = \mu_C[a,b] \leq \mu([a,b]) = F(b) - F(a)$$

2.6 Dichte, gemeinsame Verteilung & Unabhängigkeit

1. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte, stetige Zufallsvariable mit der Dichte f und der Verteilungsfunktion F. Sei weiters $X_{(n)} := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ und $X_{(1)} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

   (a) Man bestimme die Dichte und die Verteilungsfunktion von $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$.

   (b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungfunktion von $(X_{(1)}, X_{(n)})$.

   (c) Sind $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$ unabhängig?

   (d) Für 2 unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable X_1, X_2 bestimme man $\sigma(X_{(1)}, X_{(2)})$ und die durch $(X_{(1)}, X_{(2)})$ induzierte Verteilung.

   Lösung:
   Hinweis : $F(X_{(n)} \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x \cap \ldots \cap X_n \leq x)$ analoges gilt für $F_{(n)}$.

   (a)

$$X_{(1)} := min(X_i) \quad X_{(n)} := max(X_i)$$

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= F(X_{(n)} \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x \cap \ldots \cap X_n \leq x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F(x) = (F(x))^n \\
f_{X_{(n)}}(x) &= F'_{X_{(n)}}(x) = n \cdot (F(x))^{n-1} \cdot F'(x) = n \cdot f(x) \cdot F^{n-1}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - \mathbb{P}(X_{(1)} > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x \cap \ldots \cap X_n > x) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x) = 1 - (1 - F(x))^n \\
f_{X_{(1)}}(x) &= n \cdot (1 - F(x))^{n-1}(-F'(x)) = n \cdot f(x) \cdot (1 - F(x))^{n-1}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) &= \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x \cap X_{(n)} \leq y) \\
&= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq y) - \mathbb{P}(X_{(1)} > x \cap X_{(n)} \leq y) \\
&= (F(y))^n - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(x < X_i \leq y) \\
&= (F(y))^n - (F(y) - F(x))^n
\end{aligned}$$

(c)

(d)

$$\sigma(X_1, X_2) = \{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathfrak{B}_2 : (X_1(w), X_2(w)) \in B\}$$

$$\text{Beh.} : \sigma(X_{(1)}, X_{(2)}) = \{A : \exists B \in \mathfrak{B}_2 : (X_1(w), X_2(w)) \in B \ \wedge \ (X_1, X_2) \in B$$

$$\Leftrightarrow (X_2, X_1) \in B\} := \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{C} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra}$$

$$\text{Sei } C \in \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \big(X_{(1)}, X_{(2)}\big)^{-1}(C) = \{w : (X_1(w), X_2(w)) \in C \vee (X_2, X_1 \in C\} =$$

$$= \{w : (X_1(w), X_2(w)) \in C \cup C^S\}$$

$$C^S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, x) \in C\}$$

$$\text{Aus } (x, y) \in C \cup C^S \Leftrightarrow (y, x) \in C \cup C^S \Rightarrow \big(X_{(1)}, X_{(2)}\big)^{-1}(C) \in \mathfrak{C}$$

$$\Rightarrow \sigma\big(X_{(1)}, X_{(2)}\big) \subseteq \mathfrak{C}$$

$$A \in \mathfrak{C} \Rightarrow A = (X_1, X_2)^{-1}(B) \quad B \in \mathfrak{B}_2 \ \wedge \ (X_1, X_2) \in B \Leftrightarrow (X_2, X_1) \in B$$

$$\Rightarrow B = B^S \Rightarrow A = \{w : (X_1(w), X_2(w)) \in B \cup B^S\} = \big(X_{(1)}, X_{(2)}\big)^{-1}(B)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{C} \subseteq \sigma(X_{(1)}, X_{(2)})$$

$$P\big(X_1, X_2)^{-1} = \lambda_2$$

$$T : \big([0,1]^2, \mathfrak{B}_2 \cap [0,1]^2, \lambda_2\big) \to \big([0,1]^2, \mathfrak{B}_2 \cap [0,1]^2\big)$$

$$\text{mit } T(X_1, X_2) = (X_1 \cap X_2, X_1 \cup X_2)$$

$$\text{Aus (b) folgt } F_{X_{(1)}, X_{(2)}}(x, y) = y^2 - (y - x)^2 \quad 0 \le x \le y \le 1$$

2. $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \le \rho < 1$ ist die Dichte einer zweidimensionalen Normalverteilung. Man bestimme die Rand-

dichten und überlege, wann die beiden Komponenten unabhängig sind. (Hinweis: Um die Randverteilung von X zu bestimmen, stellen Sie den Exponenten dar in der Form $-\frac{x^2}{2} - \frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}$)

Lösung:

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2(1-1+\rho^2) - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\ e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$$
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{1(1-\rho^2)}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} dy}_{1\ldots\text{da Dichte einer } N(\rho x, 1-\rho^2)}$$

$$\Rightarrow \quad f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ist die Dichte einer N(0,1)}$$
$$\Rightarrow \quad f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{ist die Dichte einer N(0,1)}$$

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}1-\rho^2} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}$$

$d.h.$Y $\sim N(\rho x, 1-\rho^2)$, wenn [X=x]

3. Eine Zufallsvariable X besitzt die Dichte $f(x) = ce^{-\lambda|x|} \quad x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Man bestimme die Konstante c und die Verteilungsfunktion von X.

Bestimmen Sie auch die Dichte von $Y := X^2$.

Lösung:
Hinweis : Erinnern Sie sich: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-\lambda|x|}dx = 2c\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\lambda}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda t}dt$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x}}{2} & x \leq 0 \\ 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{2} & x > 0 \end{cases}$$

Berechnung der Dichte unter Verwendung des Transformationssatzes

$$y = \phi(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \phi^{-1}(y) = \pm\sqrt{y} \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda\sqrt{y}}|\frac{1}{2\sqrt{y}}| + \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda\sqrt{y}}|\frac{1}{2\sqrt{y}}| \\ &= \frac{\lambda}{2\sqrt{y}}e^{-\lambda\sqrt{y}} \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvarible X mit der Dichte $f(x) = \frac{a}{(1+|x|)^2} \quad a > 0$, falls er existiert.

   Hinweis : Erinnern Sie sich in welchen Fällen ein Erwartungswert existiert und wann nicht.

Lösung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a}{(1+|x|)^2} = \begin{cases} \frac{a}{(1-x)^2} & x<0 \\ \frac{a}{(1+x)^2} & x \geq 0 \end{cases} \\
x<0: \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{a}{(1-t)^2} dt = \frac{a}{1-x} \\
F(0) &= \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{1-0} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \\
x \geq 0: \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \frac{1}{2(1+t)^2} dt = 1 - \frac{1}{2(1+x)} \\
\mathbb{E}(1-x)_{x<0} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{(1-x)}{2(1-x)^2} dx = -ln(1-x)\big|_{-\infty}^{0} = +\infty \\
\mathbb{E}(-X)_{x\geq 0} &= \mathbb{E}X_- = \infty
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie gilt auch $\mathbb{E}(X_+) = \infty$. Der Erwartungswert existiert nicht.

5. Man zeige, dass einerseits keine Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ existieren muss und dass es andererseits mehrere Radon-Nikodym-Dichten geben kann, wenn μ und ν nicht σ-endlich sind.

Lösung:

(a) $\Omega = \mathbb{R}, \mathfrak{S} = \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & , |A| \leq \aleph_0 \\ \infty & , |A^c| \leq \aleph_0 \end{cases}$$

Dann gilt: $\mu(A) = \int_A 1 d\mu \;\wedge\; \mu(A) = \int_A 2 d\mu \quad \forall A \in \mathfrak{S}$

(b)

$$\text{Sei } \mu(A) := \begin{cases} n & , |A| = n \\ \infty & , |A| = \infty \end{cases} \quad \nu(A) := \begin{cases} 0 & , |A| \leq \aleph_0 \\ \infty & , |A^c| \leq \aleph_0 \end{cases}$$

$\mu(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \nu(A) = 0 \Rightarrow \nu \ll \mu$
ang. $\exists \frac{d\nu}{d\mu}: \quad \nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \quad \forall A \in \mathfrak{S}$
$\Rightarrow 0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}} \frac{d\nu}{d\mu}(t) d\mu(t) = \frac{d\nu}{d\mu}(x) . \underbrace{\mu(\{x\})}_{1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \frac{d\nu}{d\mu} \equiv 0 \Rightarrow \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = 0 \quad \forall A \in \mathfrak{S}$
Aber $\nu(A) = \infty$ für $|A^c| \leq \aleph_0 \Rightarrow$ Widerspruch

6. Gegeben seien folgende Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 5 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F sowie die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\mu_G}{d\mu_F}$ des absolut stetigen Anteils.

Lösung:
Es gilt:

$$\frac{d\mu_{G_1}}{d\mu_F}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{G(x+\epsilon) - G(x-\epsilon)}{F(x+\epsilon) - F(x-\epsilon)} = \begin{cases} \infty & \text{falls } x < 0 \\ 2 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \\ 2x & \text{falls } 1 < x < 2 \\ \infty & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

Wir können das durch folgende Funktion ersetzen (die μ_F-fast überall damit übereinstimmt):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \\ 2x & \text{falls } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

das Integral darüber gibt G_1:

$$G_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion des singulären Anteils ist

$$G_2(x) = G(x) - G_1(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

2.7 Portmanteau & charaktersitische Funktion

1. Man berechne
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-3}^{2} \frac{e^x}{1+x^2} dF_n(x)$$
mit
$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{nx} & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4n} & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{falls } 1 \le x \end{cases}$$
Lg:
$$\lim F_n = F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \end{cases} \Rightarrow \mu_F(0) = \mu_F(1) = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \lim_n \int_{-3}^{2} \frac{e^x}{1+x^2} dF_n = \int_{-3}^{2} \frac{e^x}{1+x^2} dF = \frac{1}{2}\left[\frac{e}{2} + 1\right]$$

2. Man bestimme die zur charakteristischen Funktion $\varphi(t) := e^{-|t|}$ gehörige Dichte.

Lg:
φ ist integrierbar $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-|t|} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-t(1+ix)} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)} dt\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-t(1+ix)}}{1+ix}|_{\infty}^{0} + \frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix}|_{-\infty}^{0}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1-ix+1+ix}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad \text{Dichte der charakt. Funktion} \end{aligned}$$

alternativ:
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-itx} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cos(-tx) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t} \cos(-tx) dt \\ &= \frac{e^{-t}}{\pi(1+x^2)} (-\cos(-tx) - x\sin(-xt))|_o^{\infty} \\ &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} \end{aligned}$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

3.1 Wahrscheinlichkeit

1. In einer Schule soll der Anteil der Schüler erhoben werden, die bereits Drogen genommen haben. Um die befragten Schüler nicht zu kompromitieren, wird folgendermaßen vorgegangen: Der Schüler wird ersucht zu würfeln. Fällt der Würfel auf „6“ soll er lügen, ansonsten die Wahrheit sagen. Der Interviewer erfährt aber nicht auf welche Augenzahl der Würfel gefallen ist, sodass der Schüler sich im Fall einer bejahenden Antwort immer auf das Ergebnis des Würfelns ausreden kann. Angenommen dieses Untersuchung ergibt einen Anteil $\hat{p}$ von positiven Antworten. Wie groß ist dann der Anteil p der Schüler die tatsächlich schon mit Drogen in Kontakt gekommen sind?
   Hinweis: Berechnen Sie sich zunächst die Anzahl der Schüler die angibt Drogen genommen zu haben. Daraus sollte es nun eine Leichtigkeit sein die tatsächliche Anzahl zu ermitteln.

   Lg:

   $$\hat{p} = p + (1-p)\frac{1}{6} - \frac{1}{6}p \qquad p = (\hat{p} - \frac{1}{6}) \cdot \frac{6}{4}$$

2. Die folgende Aufstellung gibt an, getrennt nach Hautfarbe von Täter und Opfer, wie oft in den USA in einem bestimmten Zeitraum die Todesstrafe verhängt wurde. Dabei bedeutet TW, dass der Täter weiß war und TB, dass er schwarz war. TS bzw. ¬TS steht für Todesstrafe bzw. Nichtverhängung der Todesstrafe.

Opfer	TW ∧ TS	TW ∧ ¬TS	TB ∧ TS	TB ∧ ¬TS
W	19	132	11	52
B	0	9	6	97

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Verhängung der Todesstrafe, wenn Sie nur nach der Hautfarbe des Täters unterscheiden. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit auch, wenn Sie sowohl nach der Hautfarbe des Täters als auch des Opfers trennen. Versuchen Sie die Diskrepanz in den Ergebnissen zu erklären.

   Lg:

$\mathbb{P}(TS|TW) = \frac{19}{160} \approx 0,11875 > \mathbb{P}(TS|TB) = \frac{17}{166} \approx 0,1024$
$\mathbb{P}(TS|O_W, TW) = \frac{19}{151} \approx 0,1258, \quad \mathbb{P}(TS|O_S, TW) = 0$
$\mathbb{P}(TS|O_W, TB) = \frac{11}{63} \approx 0,1746, \quad \mathbb{P}(TS|O_S, TB) = \frac{6}{103} \approx 0,0583$
$\mathbb{P}(TS|TW) = \mathbb{P}(TS|O_W, TW)\mathbb{P}(O_W|TW) + \mathbb{P}(TS|O_S, TW)\mathbb{P}(O_S|TW) = \frac{19}{151} \cdot \frac{151}{160} + 0 \cdot \frac{9}{160} = \frac{19}{160}$
$\mathbb{P}(TS|TB) = \mathbb{P}(TS|O_S, TB)\mathbb{P}(O_S|TB) + \mathbb{P}(TS|O_W, TB)\mathbb{P}(O_W|TB) = \frac{6}{103} \cdot \frac{103}{166} + \frac{11}{63} \cdot \frac{63}{166}$
$\mathbb{P}(TS|O_W) = \frac{30}{214} \approx 0,14018$
$\mathbb{P}(TS|O_S) = \frac{6}{112} \approx 0,0536$

Es besteht eine klare Tendenz die TS eher zu verhängen, wenn das Opfer weiß ist, aber die Opfer weißer Täter sind größtenteils weiß. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für die Todesstrafe bei einem weißen Täter höher als bei einem Schwarzen.

3. Eine bestimmte Krankheit tritt bei 1000 Personen im Schnitt 5-mal auf. Ein Labortest angewendet auf tatsachlich erkrankte Personen, erkennt diese Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.98. Angewendet auf gesunde Personen deutet das Testergebnis in 3% der Falle irrtümlich auf eine Erkrankung hin. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis. Weiters berechne man die Wahrscheinlichkeit dass eine Person bei vorliegen eines positiven Ergebnisses tatsächlich erkrankt ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Bayessche Theorem.

   Lg:

$$k \ldots krank \quad g \ldots gesund \quad P \ldots positiv \quad N \ldots negativ$$
$$\mathbb{P}(k) = 0.005 \quad \mathbb{P}(g) = 0.995 \quad \mathbb{P}(P|k) = 0.98 \quad \mathbb{P}(P|g) = 0.03$$
$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(k) \cdot \mathbb{P}(P|k) + \mathbb{P}(g) \cdot \mathbb{P}(P|g) = 0.03475$$
$$\mathbb{P}(k|P) = \frac{\mathbb{P}(k)\mathbb{P}(P|k)}{\mathbb{P}(P)} = 0.1410072$$

4. Man wirft eine Münze immer wieder. Sei A_n das Ereignis, daß in den ersten n Würfen höchstens $\lceil (1-\epsilon) ldn \rceil$ aufeinander folgende Würfe „Wappen“ zeigen. Man zeige, daß für $0 < \epsilon < 1$ gilt $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$.
Hinweis: $A_n = \bigcap_{i=1}^{n-k} B_{i,k}^c$, wobei $B_{i,k}$ das Ereignis bezeichnet, daß vom i-ten Wurf weg die folgenden k Würfe alle „Wappen“ zeigen und $k := \lfloor (1-\epsilon) ldn \rfloor$. Versuchen Sie $\mathbb{P}(A_n)$ abzuschätzen, indem Sie den obigen Durchschnitt durch einen Durchschnitt unabhängiger Ereignisse $B_{i,k}$ ersetzen.

Lg:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &\leq \bigcap_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k}{k} \rfloor} (1 - B_{j-k,k}) \\
&= (1-\tfrac{1}{2^k})^{\frac{n-k}{k}} \\
&= (1-\tfrac{1}{n^{1-\epsilon}})^{n^{1-\epsilon}\frac{n^\epsilon}{ldn}} \\
&\leq e^{-n^{\epsilon/2}} \\
&\Rightarrow \sum \mathbb{P}(A_n) \\
&< \infty \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) \\
&= 0 \\
\left[\liminf \tfrac{\lambda_n}{ldn} < 1\right] &= \textstyle\bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in\mathbb{Q}} \underbrace{\left[\liminf \frac{\lambda_n}{ldn} < 1-\epsilon\right]}_{=\limsup A_n(\epsilon)}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\lambda_n &= \max\{k : X_i = X_{i+1} = \cdots = X_{i+k-1} = 1\} \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\liminf \tfrac{\lambda_n}{ldn} \geq 1) = 1
\end{aligned}
$$

5. Man wirft eine Münze immer wieder. Sei A_n das Ereignis, daß die letzten ν_n Würfe bis zum n-ten Wurf einschließlich alle auf „Wappen“ ausgegangen sind. Man zeige, daß für beliebige $\epsilon > 0$ und $\nu_n := \lceil (1+\epsilon)ldn \rceil$ gilt $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. Kann man daran eine Aussage für den Limes superior der Folge $(\frac{\nu_n}{ldn})$ ableiten?

   Lg:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \frac{1}{2^{\lceil (1+\epsilon)ldn \rceil}} \leq \frac{1}{2^{(1+\epsilon)ldn}} = \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \\
&\Rightarrow \sum \mathbb{P}(A_n) < \infty \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0 \\
A(\epsilon) &:= \lim \sum A_n(\epsilon) \\
&= [\frac{\nu_n}{ldn} > 1 + \epsilon i.o.] \\
&= [\limsup \frac{\nu_n}{ldn} > 1+\epsilon] \\
A &:= [\limsup \frac{\nu_n}{ldn} > 1] \\
&= \bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in\mathbb{Q}} [\limsup \frac{\nu_n}{ldn} > 1+\epsilon] \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup \frac{\nu_n}{ldn} > 1) = 0 \\
&\Rightarrow (\limsup \frac{\nu_n}{ldn} \leq 1) = 1
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Sei $w \in A^c \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \nu_n \leq ldn$.

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad & N_0 := 2^{n_0}, \\ & n \geq N_0; \\ & 1 \leq i \leq n_0 : \nu_n \leq i \\ & \text{(man hat ja erst } i\text{-mal geworfen)} \\ & \leq n_0 = ldN_0 \leq ldn \\ & i > n_0 \Rightarrow \nu_i \leq ldi \leq ldn \end{aligned}$$

Somit $\lambda_n := \max\limits_{1 \leq i \leq n} \nu_i \leq ldn \quad \forall n \geq 2^{n_0}$ mit Wahrscheinlichkeit 1!
Also $\mathbb{P}(\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{ldn} \leq 1) = 1$

6. Sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen $\sim A_p$ mit $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p$ und sei A_n das Ereignis, dass zwischen dem $2^n + 1$-ten und dem 2^{n+1}-ten Versuch mindestens ein Lauf von n aufeinanderfolgenden Einsen auftritt. Man beweise:

   (a) $p < \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$

   (b) $p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$

   Hinweis: Sei $B_i := \{\xi_{i+1} = \ldots = \xi_{i+n} = 1\}$, $A_n := \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-n} B_i$. Was bedeutet es, wenn A_n eintritt? Man bestimme die Wahrscheinlichkeit von $\mathbb{P}(A_n)$. Der Fall $p < \frac{1}{2}$ sollte nun nicht mehr schwer sein.

   Lg:

   (a)

$$\begin{aligned} B_i &= [\xi_{i+1} = \ldots = \xi_{i+n} = 1] \Rightarrow \mathbb{P}(B_i) = p^n \\ A_n &= \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-n} B_i \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) \leq 2^n p^n = (2p)^n \end{aligned}$$

   Daher gilt für $p < \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$$

(b) $2p \geq 1$

$$\begin{aligned} A_n^C &= \bigcap_{i=2^n}^{2^{n+1}-n} B_i^C \subseteq \bigcap_{i=\lceil \frac{2^n}{n} \rceil}^{\lfloor \frac{2^{n+1}-n}{n} \rfloor} B_{in}^C \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbb{P}(A_n^C) &= \prod_{i=\lceil \frac{2^n}{n} \rceil}^{\lfloor \frac{2^{n+1}-n}{n} \rfloor} \mathbb{P}(B_i^C) \leq \\ &\leq (1-p^n)^{\frac{2^n}{n}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A_n) \geq 1-(1-p^n)^{\frac{2^n}{n}} > 1-e^{\frac{-(2p)^n}{n}} > 1-e^{-\frac{1}{n}} > \frac{1}{2}$$

$$\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\lim\ \sup A_n) = 1$$

7. Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger alternativverteilter Zufallsvariablen mit
$\mathbb{P}(\xi_n = +1) = p$ und $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1-p$ $(p \neq \frac{1}{2})$. Man zeige:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k = 0 \text{ für unendlich viele } n\right) = 0.$$

Hinweis: Man berechne $\mathbb{P}(S_n = 0)$ für n gerade und suche für diese Wahrscheinlichkeit eine passende obere Schranke, sodass man

$$\sum \mathbb{P}(S_n = 0) < \infty$$

beweisen kann.

Lg:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

$$
\begin{aligned}
n &= 2i-1: \ \mathbb{P}(S_n=0)=0\\
n &= 2i:\\
\binom{2i}{i} &= \frac{(2i)!}{i!\cdot i!} = \underbrace{\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2i}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}}_{=2^i}\cdot\underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2i-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}}_{\leq 2^i} \leq\\
&\leq 2^{2i}=4^i\\
&\Rightarrow \ \mathbb{P}(S_n=0)=\binom{2i}{i}p^iq^i \leq 2^{2i}p^iq^i
\end{aligned}
$$

Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $p<\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(S_n=0) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{4^np^nq^n}_{g^n}=\\
&= \frac{1}{1-g}=\frac{1}{1-4pq}<\infty
\end{aligned}
$$

Daher gilt wegen des 1-ten Lemmas von Borel-Cantelli

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(S_n=0)<\infty\Rightarrow\mathbb{P}(\limsup[S_n=0])=0$$

Nebenrechnung: $g<1$:

$$
\begin{aligned}
g &= 4pq=4p(1-p)=4p-4p^2=1-1+4p-4p^2=\\
&= 1-\underbrace{(1-2p)^2}_{>0}<1 \quad (p\neq\frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

8. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, (A_n) eine Mengenfolge aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt
   (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)<\infty\Rightarrow\mathbb{P}(\overline{\lim}A_n)=0$
   (b) Sind die (A_n) unabhängig voneinander, so folgt aus
   $$\sum_n\mathbb{P}(A_n)=\infty \quad \mathbb{P}(\overline{\lim}A_n)=1.$$

Lg:
Beweis:

(a)

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim} A_n &= \bigcap_n \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{B_n} \\
&\Rightarrow \overline{\lim} A_n \subseteq B_n \forall n \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) \leq \mathbb{P}(B_n) \\
&\leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) \to 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(\overline{\lim} A_n)^c = \underline{\lim} A_k^c &= \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k^c \\
&\Rightarrow \mathbb{P}((\overline{\lim} A_n)^c) \\
&\leq \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) \\
&= \prod_{k\geq n} (1-\mathbb{P}(A_k)) \\
&= e^{\sum_{k\geq n} \ln(1-\mathbb{P}(A_k))} \\
&\leq e^{-\sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k)} \\
&= e^{-\infty} = 0 \\
&\Rightarrow \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1
\end{aligned}
$$

9. Ist$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt

$$\mathbb{P}(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mathbb{P}(A_n) \leq \overline{\lim} \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\overline{\lim} A_n)$$

Lg:

$$
\begin{aligned}
\underline{\lim} A_n &= \bigcup_n \underbrace{\bigcap_{k\geq n} A_k}_{B_n}, \\
B_n \nearrow \underline{\lim}(A_n) &\Rightarrow \mathbb{P}(\underline{\lim}(A_n)) \\
&= \lim \mathbb{P}(B_n) \\
&\leq \liminf \mathbb{P}(A_n), \text{ denn } B_n \subseteq A_n \quad \forall \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Analog

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} A_n &= \bigcap_n \underbrace{\bigcup_{k\geq n} A_k}_{C_n \supseteq A_n}, \\
C_n \searrow \overline{A} &\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) \\
&= \lim \mathbb{P}(C_n) \\
&\geq \limsup \mathbb{P}(A_n)
\end{aligned}$$

10. Man zeige, dass in einer Folge von Würfen mit einem fairen Würfel mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder einmal die Teilfolge $1, 2, 3, 4, 5, 6$ auftreten muss.

    Lg:

    $$B_i = [X_i = 1, ..., X_{i+5} = 6] \Rightarrow \mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{6^6}$$

    $(B_{j6})_{j\in\mathbb{N}_0}$ bildet eine unabhängige Teilfolge mit

    $$\begin{aligned}
    &\sum_{j\in\mathbb{N}} B_{j6} = \infty \\
    \Rightarrow\ & \mathbb{P}(\limsup B_{j6}) = 1 \\
    \Rightarrow\ & (\limsup B_i \supseteq \limsup B_{j6}) \\
    \Rightarrow\ & \mathbb{P}(\limsup B_i) = 1
    \end{aligned}$$

11. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge unabhängiger Ereignisse. Man zeige, dass die Menge $\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(w) = x\}, \quad x \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 hat.

    Lg:
    $\{w : \lim \frac{1}{n} \sum \mathbb{1}_{A_i}(w) = x\}$ liegt in $\tau_\sigma = \bigcap_{n=1}^\infty \mathfrak{A}_\sigma(A_n, A_{n+1}, \dots)$ □

12. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6 aus 45 ein Zahlentripel $i, i+1, i+2$ gezogen wird.

    Lg:
    $A_i = \{i, i+1, i+2\}$ wird gezogen, $i = 1, \dots, 43$
    $P(A_i) = \binom{42}{3}p,\ p = \frac{1}{\binom{45}{6}} \Rightarrow S_1 = \sum P(A_i) = 43 \cdot \binom{42}{3}p$

$$
\begin{aligned}
A_i \cap A_{i+1} &= \{i, \ldots, i+3\}\ P(A_i \cap A_{i+1}) \\
&= \binom{41}{2} p,\ i = 1, \ldots, 42 \\
A_i \cap A_{i+2} &= \{i, \ldots, i+4\}\ P(A_i \cap A_{i+2}) \\
&= \binom{40}{1} p,\ i = 1, \ldots, 41 \\
A_i \cap A_j &= \{i, i+1, i+2, j, j+1, j+2\} \\
&\Rightarrow P(A_i \cap A_j) = p\ |i-j| > 2 \\
S_2 &= \sum_{\{i,j\} \subseteq \{1,45\}} P(A_i \cap A_j) \\
&= [\binom{43}{2} - 42 - 41] \cdot p + 42\binom{41}{2}p + 41\binom{40}{1}p \\
S_3 :\ & A_i \cap A_{i+1} \cap A_{i+2} \\
&= \{i, i+1, i+2, i+3, i+4\},\ P(A_i \cap A_{i+1} \cap A_{i+2}) \\
&= \binom{40}{1} p,\ i = 1, \ldots, 41
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
A_i \cap A_{i+1} \cap A_{i+3} = \{i, \ldots, i+5\} \Rightarrow P(A_i \cap A_{i+1} \cap A_{i+3}) = p \\
A_i \cap A_{i+2} \cap A_{i+3} = \{i, \ldots, i+5\} \Rightarrow P(A_i \cap A_{i+2} \cap A_{i+3}) = p
\end{array}\right\} i = 1, \ldots, 40
$$

$$
\begin{aligned}
A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} &= \emptyset \text{ sonst.} \\
S_3 &= 41\binom{40}{1}p + 2 \cdot 40p \\
S_4 &= A_i \cap A_{i+1} \cap A_{i+2} \cap A_{i+3} \\
&= \{i, \ldots, i+5\}\ P = p,\ i = 1, \ldots, 40, \\
S_4 &= 40p \\
P(\bigcup A_i) &= S_1 - S_2 + S_3 - S_4
\end{aligned}
$$

13. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6 aus 45 die maximale gezogene Zahl gerade i ($i = 6, \ldots, 45$) ist.
Hinweis: Man bestimme die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse $B_i := \{\{x_1, \ldots, x_6\} \subseteq \{1, \ldots, 45\} : \max_{1 \leq j \leq 6} x_j \leq i\}$ und verwende die Subadditivität der Wahrscheinlichkeit.

Lg:

$$\begin{aligned}
P(B_i) &= \frac{\binom{i}{6}}{\binom{45}{6}} \quad B_{i-1} \subseteq B_i \\
A_i &:= \{\{x_1, \dots, x_6\} : \max_{1 \le j \le 6} x_j = i\} = B_i \setminus B_{i-1} \quad i > 6 \\
&\Rightarrow A_6 = B_6 \Rightarrow P(A_6) = \frac{1}{\binom{45}{6}} \\
P(A_i) &= P(B_{i-1}) = \frac{\binom{i}{6} - \binom{i-1}{6}}{\binom{45}{6}} \quad i = 7, \dots, 45
\end{aligned}$$

14. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Bridgespiel (52 Karten, 4 Farben) mindestens 1 Spieler 13 gleichfarbige Karten hat.

    Lg:
    $A_i \dots$ Spieler 1 hat 13 gleiche Karten

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{4}{\binom{52}{13}} \Rightarrow S_1 = \sum_1^4 P(A_i) = \frac{16}{\binom{52}{13}} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\
&= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}} \\
&\Rightarrow S_3 = 4 \cdot \frac{24}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}} \\
P(\bigcup A_i) &= S_1 - S_2 + S_3 - S_4
\end{aligned}$$

15. Man zeige, dass es keinen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit einer unendlichen Folge von unabhängigen Ereignissen geben kann mit $P(A_n) = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

    Beweis:
    Sei $\omega \varepsilon \Omega, \|\Omega\| \le \aleph_0$
    $\omega \in A_1 \vee \omega \in A_1^c \Rightarrow P(\omega) \le \frac{1}{2}$
    Sei $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\epsilon}$ mit $\epsilon = 0 \vee \epsilon = 1 \quad A^0 = A^c, A^1 = A$
    $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{2^n}$
    $\omega \in \Omega \Rightarrow \exists B \; i \; \omega \in B \Rightarrow P(\omega) \le \frac{1}{2^n}$
    $\Rightarrow P(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$
    $\Rightarrow P(\Omega) = 0$ Wid □

16. Durch fortwährendes Würfeln kann man eine Zufallsfolge $(x_1, x_2, \dots)$ aus den Ziffern $\{0, 1, 2\}$ erzeugen, indem man bspw. die Augenanzahl mod 3 nimmt, d.h. x_n ist bspw. 0, wenn man 3 oder 6 würfelt.

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C_n, dass während der ersten n Würfe keine 1 erzeugt wird.

b) Man beschreibe das Ereignis C, dass nie eine 1 erzeugt wird durch die Ereignisse C_n und berechne seine Wahrscheinlichkeit, wenn man von der Wahrscheinlichkeitsverteilung annimmt, dass sie monoton ist.

c) Man bestimme die Mächtigkeit von C.

Lösung:

a) $P(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

b) $C = \bigcap\limits_{\mathbb{N}} C_n \qquad P(C) \leq P(C_n) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \Rightarrow P(C) = 0$

c) $C = \{(x_1, x_2, \dots): \quad x_i \in \{\{0, 2\}\} \Rightarrow \|C\| > \aleph_0$ □

17. Man erzeugt eine triadische Ziffernfolge $(x_1, x_2, \dots)$ durch fortlaufendes Würfeln, indem man die Augensumme mod 3 nimmt.

a) Man beschreibe das Ereignis F_n, dass beim n-ten Wurf keine 1 erzeugt wird.

b) Man beschreibe F_n als Vereinigung von Intervallen, wenn man die Ziffernfolge $(x_1, x_2, \dots)$ als Darstellung der Zahl $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{x_i}{3^i}$ im Zahlensystem zur Basis 3 auffasst. Dabei sei vereinbart, dass Zahlen, die zumindest eine tridadische Darstellung ohne 1 an der n-ten Stelle besitzen, zu F_n gezählt werden, also $(x_1, \dots, x_{n-1}, 1, 0, \dots) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 2, 2, \dots)$ bzw. $(x_1, \dots, x_{n-1}, 1, 2, 2, \dots) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 2, 0, \dots)$ zählen zu F_n. (Hinweis: Ist $(x_1, \dots, x_{n-1})$ ein konkretes n-Tupel von Ziffern, so bilden alle Folgen, die x_1^{n-1} als Anfangsstück haben, das Intervall $\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{x_i}{3^i}, \sum\limits_{i=1}^{n-1} \dfrac{x_i}{3^i} + \dfrac{1}{3^{n-1}}\right]$, wobei der linke Eckpunkt zur Folge $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots)$ gehört und der rechte Eckpunkt zur Folge $(x_1, \dots, x_{n-1}, 2, 2, \dots)$).

Beweis:

a) $F_n = \{(x_1, x_2, \dots) : x_n \neq 1\}$

b) Klarerweise gilt:

$$[0,1] = \bigcup_{x_1^{n-1}:=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\{0,1,2\}^{n-1}} \Big[\underbrace{\sum_1^{n-1}\frac{x_i}{3^i}}_{\tilde{x}(x_1,\dots,x_{n-1})}, \sum_1^{n-1}\frac{x_i}{3^i} + \frac{1}{3^{n-1}}\Big]$$

Daher gilt:

$$F_n = \bigcup_{x_1^{n-1}} \underbrace{\{(x_1,\dots,x_{n-1},0,x_{n+1},x_{n+2},\dots\}}_{F_{n,0}} \cup \underbrace{\{(x_1,\dots,x_{n-1},2,x_{n+1},\dots)\}}_{F_{n,2}}$$

Den Folgen aus $F_{n,0}$ entspricht das Intervall $\left[\tilde{x}, \tilde{x} + \frac{1}{3^n}\right]$, wobei der linke Endpunkt zur Folge $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, \dots)$ gehört und der rechte Endpunkt zur Folge $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 2, 2, \dots)$; den Folgen aus $F_{n,2}$ entspricht $\left[\tilde{x} + \frac{2}{3^n}, \tilde{x} + \frac{1}{3^{n-1}}\right]$
(linker Eckpunkt $\leftrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, 2, 0, \dots)$
rechter Eckpunkt $\leftrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, 2, 2, \dots)$)
somit $F_n = \bigcup_{x_1^{n-1}\in\{0,1,2\}^{n-1}} \left[\tilde{x}(x_1,\dots,x_{n-1}), \tilde{x}+\frac{1}{3^n}\right] \cup \left[\tilde{x}+\frac{2}{3^n}, \tilde{x}+\frac{1}{3^{n-1}}\right]$
$\Rightarrow$ wegen $\lambda(F_{n,0}) = \lambda(F_{n,2}) = \frac{1}{3^n}$ gilt $\lambda(F_n) = \frac{2\cdot 3^{n-1}}{3^n} = \frac{2}{3}$ $\square$

18. Mit den Bezeichnungen und unter den Annahmen des vorigen Beispiels zeige man, dass gilt:

a) $C_n := \bigcap_{i=1}^n F_i = \bigcup_{x_1^n:=(x_1,\dots,x_n)\in\{0,2\}^n} \left[\tilde{x}(x_1^n), \tilde{x}(x_1^n) + \frac{1}{3^n}\right]$
mit $\tilde{x}(x_1^n) := \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{3^i}$.

b) $C := \bigcap_{\mathbb{N}} C_n$ ist nirgends dicht, d.h. es gibt kein nichtleeres offenes Intervall $(a,b) \quad (a<b)$ mit $(a,b) \subseteq C$.

Beweis:

a) $n = 1: \quad C_1 = F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

b) Sei (a,b) ein Intervall mit $a < b \Rightarrow \exists n : 3^{-n} < \frac{b-a}{2}$
$\Rightarrow \exists x_1^n \in \{0,1,2\}^n : \left[\tilde{x}(x_1^n), \tilde{x}(x_1^n) + \frac{1}{3^n}\right] \subseteq (a,b)$, aber
$(\tilde{x}(x_1^n) + \frac{1}{3^{n+1}}, \tilde{x}(x_1^n) + \frac{2}{3^{n+1}}) \subseteq C_n^c \subset C^c \Rightarrow (a,b) \nsubseteq C$ $\square$

3.2 Dichte & Transformation

1. Sei X verteilt mit der Dichte $f(x) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$.
   (X heißt normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2)

   (a) Bestimmen Sie die Dichte von $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

   (b) Sei $X \sim N(0,1)$. Wandeln Sie X durch eine geeignete Transformation in eine $N(\mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable um.

   (c) Die Verteilungsfunktion Φ der Standard-Normalverteilung liegt häufig in tabellierter Form vor. Wie können sie mit Hilfe einer derartigen Tabelle die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1.5)$ berechnen wenn Sie wissen, dass $X \sim N(1,4)$?

   Lösung:

   (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \psi(y) = y\sigma + \mu \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sigma$
   $\Rightarrow \quad f(\psi(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y\sigma+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
   $f_\eta(y) = f(\psi(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y\sigma+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$
   $f_\eta(y) \ldots$ Dichte der Standardnormalverteilung

   (b)
   $$y = \varphi(x) = x\sigma + \mu \qquad \varphi^{-1}(y) = \psi(y) \qquad \psi(y) = \frac{y-\mu}{\sigma}$$
   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad f_\eta(y) = f(\psi(y)) |\frac{d\psi(y)}{dy}|$$
   $$f(\psi(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
   $$\Rightarrow f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   (c)
   $$X \sim N(1,4) \qquad \Rightarrow \qquad Y = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1}{2} \sim N(0,1)$$

2. Erzeugen Sie aus Zufallszahlen, die auf $[0,1]$ gleichverteilt sind, mit der Inversenmethode Zufallszahlen mit folgenden Verteilungen:

   (a) E_{x_2}

   (b) $f(x) = 2axe^{-ax^2}, x, a > 0$ ist die Dichte einer Rayleigh-Verteilung mit dem Parameter a. Man nehme $a = 3$.

(c) $H_{10,4,4}$

Lösung:

(a) *#transformiere auf Exponentialvt*
ExpZz $<-$ -log(Gleichvt)
par(mfcol=c(1,2))
hist(Gleichvt)
abline(h=100,col="red")
hist(ExpZz)
dev.print()

(b) *#transformiere aud Rayleighvt*
RZz $<-$ sqrt(-log(Gleichvt)/3)
par(mfcol=c(1,2))
hist(Gleichvt)
abline(h=100,col="red")
hist(RZz)
dev.print

(c) *HZz $<-$ ghyper(Gleichvt,4,6,4)*
par(mfcol=c(1,2))
hist(Gleichvt)
abline(h=100,col="red")
table(HZz)

 # Zeichnung der verallgemeinerten Inversen der Hypergeometrischen
VFH $<-$ phyper(0:4,4,6,4)
InvFH $<-$ ghyper(VFH,4,6,4)
plot(VFH,InvFH,Ty="s")

3. Angenommen Sie haben einen Zufallszahlengenerator, der Ihnen auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallszahlen liefert, wie können Sie dann Rayleighverteilte Zufallszahlen (Dichte: $f(x) = 2axe^{-ax^2}\ x, a > 0$) erzeugen?

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2axe^{-ax^2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_0^x f(t)dt \\
F(x) &= \int_0^x 2ate^{-at^2}dt = 2a\int_0^x te^{-at^2}dt \\
&= 1 - e^{-ax^2}
\end{aligned}$$

$$x = F^{-1}(y) = \sqrt{\frac{-\ln(1-y)}{a}}$$

3.3 Verallgemeinerte Inverse

1. Man zeige, dass für die verallgemeinerte Inverse F^{-1} einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:

   (a) $F(F^{-1}(p)) \geq p \quad \wedge \quad F^{-1}(F(x)) \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p \in [0,1].$

   (b) F^{-1} ist linksstetig.

   (c) Ist F stetig in x, so gilt für $p := F(x) : \quad F(F^{-1}(p)) = p.$

   (d) Ist F strikt monoton in x, so gilt: $F^{-1}(F(x)) = x$.

   Lösung:

   (a) Sei p gegeben, $x := F^{-1}(p) \Rightarrow F^{-1}(p) \leq x \Rightarrow$ (wegen $p \leq F(x) \Leftrightarrow F^{-1}(p) \leq x$) $\Rightarrow p \leq F(x) = F(F^{-1}(p))$
   Sei x gegeben, $p := F(x) \Rightarrow p \leq F(x) \Rightarrow$ (wegen $p \leq F(x) \Leftrightarrow F^{-1}(p) \leq x$)$\Rightarrow F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(p) \leq x$

   (b) F^{-1} ist linksstetig: $\quad p_n \nearrow p \Rightarrow F^{-1}(p_n) \leq F^{-1}(p) \quad \forall n$
   Sei $x := F^{-1}(p), \quad \epsilon > 0 \Rightarrow F(x-\epsilon) < p$
   $p_n \nearrow p \Rightarrow \exists n_\epsilon : \forall n \geq n_\epsilon \quad p_n \geq F(x-\epsilon) \Rightarrow$ (wie in Punkt a))
   $F^{-1}(p) - \epsilon = x - \epsilon < F^{-1}(p_n) \quad \forall n \geq n_\epsilon \Rightarrow \lim F^{-1}(p_n) = F^{-1}(p)$

   (c) Sei $p := F(x) \Rightarrow p \leq F(x) \Rightarrow$ (wie in Punkt a))$F^{-1}(p) \leq x \Rightarrow$ (Monotonie und Punkt a))$p \leq F(F^{-1}(p) \leq F(x) = p$.
   Die Aussage gilt also für jedes p: $\exists x : p = F(x)$.

   (d) $p := F(x)$
   $F \nearrow$ strikt $\Rightarrow F(x - \frac{1}{n}) < F(x) = p \quad \forall n \Rightarrow$ (wie in a)) $F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(p) \geq x - \frac{1}{n} \quad \forall n \Rightarrow F^{-1}(F(x)) \geq x$
   Zusammen mit Punkt a) ergibt das: $F^{-1}(F(x)) = x$.

3.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen & Unabghängigkeit

1. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung und die Randverteilungen von X und Y für jede der 3 folgenden Varianten:

   (a) X ist die Anzahl der Köpfe bei 2 Münzwürfen und Y die Anzahl der Adler bei weiteren 2 Münzwürfen.

   (b) X ist die Anzahl der Köpfe bei 2 Münzwürfen und Y die Anzahl der Adler bei diesen Würfen.

   (c) Die Münze wird 3-mal geworfen. X ist die Anzahl der Köpfe bei den ersten Würfen, Y die Anzahl der Adler bei den beiden letzten Würfen.

   Lösung:

   (a)

$\frac{X}{Y}$	0	1	2	$\mathbb{P}_y$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}_X$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$\mathbb{P}(X = \cdot | Y = y) = \mathbb{P}_x$$

   (b)

$\frac{X}{Y}$	0	1	2	$\mathbb{P}_y$
0			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}_X$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$\mathbb{P}_{X|Y=0} = (0,0,1) \quad \mathbb{P}_{X|Y=1} = (0,1,0) \quad \mathbb{P}_{X|Y=2} = (1,0,0)$$

(c)

$\frac{X}{Y}$	0	1	2	$\mathbb{P}_y$
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
$\mathbb{P}_X$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X|Y=0} &= \frac{1}{4}\cdot(0,\frac{1}{8},\frac{1}{8}) = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \\
\mathbb{P}_{X|Y=1} &= 2\cdot(\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8}) = (\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}) \\
\mathbb{P}_{X|Y=2} &= (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1,Y=0) &= \mathbb{P}(W_1=A,W_2=K,W_3=K) = \frac{1}{8} \\
\mathbb{P}(X=2,Y=0) &= \mathbb{P}(W_1=K,W_2=K,W_3=K) = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

2. Man zeige: Wenn der m-dimensionale Zufallsvektor $\vec{X} := (X_1,\ldots,X_m)$ nur höchstens abzählbar viele Werte $(x_{n,1},\ldots,x_{n,m})$ aus $\mathbb{R}$ annehmen kann, so sind seine Komponenten X_i unabhängig genau dann, wenn:

$$P\vec{X}^{-1}((x_{n,1},\ldots,x_{n,m})) = \prod_{i=1}^{m} PX_i^{-1}(x_{n,i}), \quad \forall (x_{n,1},\ldots,x_{n,m})$$

Beweis:

$$\text{Aus Satz (S128(a)) folgt}$$

$$P\vec{X}^{-1}\big(X_{i=1}^{m}(x_{n,i}-\tfrac{1}{k},x_{n,i}]\big)=\prod_{i=1}^{m}PX_i^{-1}\big((x_{n,i}-\tfrac{1}{k},x_{n,i}]\big)\quad\forall k\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow P\vec{X}^{-1}((x_{n,1},\dots,x_{n,m}))=\prod_{i=1}^{m}PX_i^{-1}(x_{n,i})$$

$$\text{Umgekehrt}$$

$$P\vec{X}^{-1}\big(X_{i=1}^{m}B_j\big)=\sum_{n:(x_{n,1},\dots,x_{n,m})\in X_{i=1}^{m}B_j}P\vec{X}^{-1}((x_{n,1},\dots,x_{n,m}))$$

$$=\sum_{x_{n,1}\in B_1}\cdots\sum_{x_{n,m}\in B_m}\prod_{j=1}^{m}PX_i^{-1}(x_{n,j})=\prod_{j=1}^{m}\sum_{x_{m,j}\in B_j}PX_j^{-1}(x_{n,j})$$

Bemerkung:
Ist $\vec{X}:=(X_1,\dots,X_m)$ ein m-dimensionaler Zufallsvektor auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega\mathfrak{S},P)$ und $T:(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)\to(\mathbb{R}^k,\mathfrak{B}_k)$, so ist natürlich auch die transformierte Abbildung $T\circ(X_1,\dots,X_m)$ ein Zufallsvektor. Häufig wird dann $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m,P\vec{X}^{-1})$ als neuer Grundraum angesehen und nur mehr die Abbildung $T:(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m,P\vec{X}^{-1})\to(\mathbb{R}^k,\mathfrak{B}_k)$ betrachtet.

3. Aus einer (im Idealfall unendlichen bzw. bei Ziehung mit Zurücklegen auch endlichen) Grundgesamtheit wird eine Stichprobe vom Umfang n gezogen. Die Proben nehmen genau eines von $k\quad(\geq 2)$ möglichen Merkmalen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p_i für das i-te Merkmal an $(i=1,\dots,k)$. Von Interesse ist die Zahl von Proben zu jedem Merkmal.

   (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion für diese (k- dimensionale) Zufallsvariable.

   (b) Wie lauten die eindimensionalen Randverteilungen?

   Lösung:
   Sei ξ_i die Anzahl mit der das i-te Merkmal in den n Versuchen auftritt $i=1,\dots,k$

   Da jedes Merkmal genau 1-mal auftritt, muß gelten $\sum\xi_i=n$ bzw. $\mathbb{P}(\xi_1=n_1,\dots,\xi_k=n_k)=0,\quad\forall(n_1,\dots,n_k):\sum_{i=1}^{k}n_i\neq n$.

   Wir nummerieren die Merkmale von 1 bis k, η_i gebe das Merkmal des i-ten Versuchs an, dh. $\eta_i=j$ bedeutet, daß beim i-ten Versuch

das Merkmal j aufgetreten ist.
Dann gilt natürlich:

$$\xi_j := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(\eta_i), \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

$$\text{Sei } \; n_j := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{j\}}(x_i), \quad \forall j = 1, \ldots, k$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\mathbb{P}(\eta_1 = x_1, \ldots, \eta_n = x_n) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j}, \;\; \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \{1, \ldots, k\}^n$$

Unter den n Zahlen sind n_1 gleich 1, n_2 gleich 2, $\ldots n_k$ gleich k. Daher gibt es $\frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} n_j!}$ verschiedene Möglichkeiten diese Zahlen anzuordnen.
Somit gilt:

$$\mathbb{P}(\xi_1 = n_1, \ldots, \xi_k = n_k) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{k} n_j!} \prod_{j=1}^{k} p_j^{n_j} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} n_j &= n \\ \sum_{j=1}^{k} p_j &= 1 \end{aligned}$$

Randvt von ξ_j: Bei jeden Versuch gibt es nur 2 mögliche Ausgänge: entweder tritt das Merkmal j auf oder es tritt nicht auf. Daher muss ξ_j als Anzahl der Versuche, bei denen Merkmal j auftritt, klarerweise binomialverteilt sein, also ξ_j vt $B_{n,p}$;
$\mathbb{P}(\xi_i = n_i) = \binom{n}{n_i} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{n - n_i}$

3.5 Integralkonvergenzsätze

1. Man zeige, dass $X_n := n^2 \mathbb{1}_{(0,n^{-1})}$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ λ-fü gegen 0 konvergiert, dass aber $\lim_{n\to\infty} \int X_n d\lambda = \infty$. Welche Voraussetzung in den Konvergenzsätzen ist verletzt?

   Lösung:

$$\int X_n d\lambda = n \to \infty \quad \neq \int X d\mu = 0$$

   X_n ist nicht monoton

2. Man zeige: konvergiert eine Folge (X_n) nichtnegativer Funktionen mit $\sup_n \int X_n d\mu < \infty$ μ-fü gegen X, so ist X integrierbar und es gilt: $\int X d\mu \leq \sup_n \int X_n d\mu$.

   Lösung:

$$0 \leq X_n \ \wedge \ \text{Lemma von Fatou} \Rightarrow$$

$$\int \liminf X_n d\mu \leq \liminf \int X_n d\mu \leq A < \infty$$

   Wegen $\lim X_n = X$ gilt $\liminf X_n = X$

3. Man beweise, dass für eine Folge integrierbarer Funktionen mit $\sum_{n=1}^{\infty} \int |X_n| d\mu < \infty$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ λ-fü gegen eine integrierbare Funktion X konvergiert und dass gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int X_n d\mu = \int X d\mu$$

   Beweis:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} X_n \right| \leq \sum_{n=1}^{N} |X_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$$

$$\sum_{n=1}^{N} |X_n| \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| = X \text{ (Konvergenz durch Monotonie)}$$

$$\Rightarrow \int X d\mu = \lim_N \int \sum_{n=1}^{N} |X_n| d\mu = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \int |X_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |X_n| d\mu < \infty$$

4. Man zeige, dass es Folgen (X_n) gibt, die im $p-$ten Mittel gegen X konvergieren, die aber nicht $\mu-$fü gegen X konvergieren.

   Lg:
   $([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$

$X_{n,m}(u) := \begin{cases} 1, & \frac{m-1}{n} < u \leq \frac{m}{n},\ 1 \leq m \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$\|X_{n,m}\|_p^p = \frac{1}{n} \to 0$
Aber $X_{n,m} \overset{L_p}{\to} 0$
Aber offensichtlich $X_{n,m}(u) \nrightarrow 0\ \forall u \in [0,1]$

5. Man zeige:

   (a) Aus der gleichmäßigen Kongergenz $\mu-$fü folgt im Allgemeinen nicht Konvergenz im $p-$ten Mittel.

   (b) Aus $X \in L_p$ folgt im Allgemeinen nicht $X \in L_p$ für $1 \leq q \leq p$.

   Lg:

   (a) $([0,\infty), \mathcal{L} \cap [0,\infty), \lambda)$
   $X_n(u) := \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \mathbb{1}_{[0,n]}$
   $|X_n(u) - 0| \leq n^{-\frac{1}{p}} \Rightarrow X_n \to 0$ glm. $\lambda-$fü.
   Aber $\|X_n\|_p = 1,\ \ \|0\|_p = 0$

   (b) $([1,\infty), \mathcal{L} \cap [1,\infty), \lambda)$
   $X(u) := \frac{1}{w} \quad \forall w \in [1,\infty), \quad X \in L_2, X \notin L_1$

3.6 Erwartungswert, Varianz & Momenterzeugende

1. In einer Urne befinden sich i Lose mit den Nummern i ($i \in \{1, \ldots, 10\}$). 5 Lose werden ohne Zurücklegen gezogen. Es sei ξ_i das Ergebnis der i-ten Ziehung. Man berechne den Erwartungswert.

   Hinweis : Erinnern Sie sich an die Formel: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Lösung:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$N = 55 \text{ Anzahl der Lose}$$
$$\mathbb{E}\xi_i = \sum x_n p_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{10} i \frac{i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} i^2 = 7$$
$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_5) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}(\xi_i) = 35$$

2. Bei einer Lotterie werden 50 000 Gewinne aus 100 000 Losen mit Zurücklegen gezogen. Die Lotterie bewirbt dieses Spiel mit dem Slogan: *Jedes zweite Los gewinnt*. Ist diese Aussage korrekt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Los zu gewinnen? Wie groß ist die mittlere Anzahl von Gewinnen pro Los?

   Hinweis : Denken Sie an die Verteilung der Gewinne.

   Lösung:

$$G \ldots \textit{mind. ein Gewinn} \qquad G^c \ldots \textit{kein Gewinn}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G^c) &= (1 - \frac{1}{10^5})^{\frac{10^5}{2}} \approx e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065 \\ \mathbb{P}(G) &= 0.3935 \end{aligned}$$

$$T_i \ldots \text{Anzahl der Gewinne auf Los i} \quad T := \sum_{i=1}^{10^5} T_i$$

$$T = 50\,000 \quad \Rightarrow \quad 50\,000 = 100\,000\,\mathbb{E}T = \sum_{i=1}^{10^5} \mathbb{E}T_i$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}T_i = \frac{1}{2}$$

3. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

Hinweis : Stellen Sie $\mathbb{P}(X \geq k)$ als Summe von Wahrscheinlichkeiten dar und vertauschen Sie die Summationsreihenfolge.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{x} p(x) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{x=t}^{\infty} \mathbb{P}(X = t) \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq t) \end{aligned}$$

$$\int P(X > t) d\lambda = \int \int \mathbb{1}_{[t,\infty)}(x) dP(x) d\lambda(t) =$$

$$= \int \big(\int_0^x d\lambda(t) \big) dP(x) = \int x dP(x) = \mathbb{E}X$$

4. In einer Urne befinden sich 2 weiße und 8 schwarze Kugeln. Spieler A zieht solange ohne Zurücklegen aus der Urne, bis er die erste weiße Kugel erwischt. Danach zieht B bis zur 2-ten weißen Kugel. Dabei muss jeder Spieler dem Gegner pro Zug einen Euro zahlen. Ist das Spiel fair?

Hinweis: Stellen Sie sich vor, Sie ziehen, bis die Urne leer ist und legen die Kugeln kreisförmig auf, wobei Sie den Beginn der Ziehungen mit einer zusätzlichen besonders gekennzeichneten Kugel markieren. Betrachten Sie nun die Anzahl der Kugeln bis einschließlich der 1-ten weißen Kugel, die Anzahl der Kugeln von dort weg bis einschließlich der 2-ten weißen Kugel und die Anzahl der restlichen Kugeln bis einschließlich der markierten Kugel.

Lösung:

$X_1 \ldots$ Ziehungen bis 1-te weiße Kugel
$X_2 \ldots$ Ziehungen bis 2-te weiße Kugel

$X_3 \ldots$ Rest + Startkugel

$X_1 + X_2 + X_3 = 11$
X_i sind identisch verteilt $\Rightarrow \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \mathbb{E}X_3$

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^{3} X_i = 3\mathbb{E}X_i = 11 \Rightarrow \mathbb{E}X_i = \frac{11}{3}$$

5. Eine Münze wird n-mal geworfen. Sei v_n die Anzahl der Folgen (K, K) im Verlauf dieser Würfe. Man berechne $\mathbb{E}v_n$.

   Hinweis : Es gilt: $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(x_i)$

   Lösung:

$$\mu_i = \begin{cases} 1 & \xi_i = \xi_{i-1} = K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\mu_i = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \nu_n = \sum_{i=2}^{n} \mu_i \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\nu_n = \frac{(n-1)}{4}$$

6. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

   (a) $X \sim G_p$ (Geometrische Verteilung)
   (b) $X \sim H_{N,A,n}$
   (c) $X \sim negB_{n,p}$ (negative Binomialverteilung)
   (d) $X \sim E_{x_\lambda}$
   (e) $X \sim P_\lambda$
   (f) $X \sim Er_{n,\lambda}$ (Erlangverteilung)
   (g) $X \sim N(0, 1)$

   Lösung:

   (a)

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$\mathbb{E}X^2 = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$var(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

   (b)

(c)

$$\begin{aligned} X &:= \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad X_i \sim A_p \\ &\Rightarrow \mathbb{E}X = np \\ &\Rightarrow var(X) = np(1-p) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \underbrace{xe^{-\lambda x}|_0^\infty}_{0} \qquad - \qquad \int_0^\infty (-1)\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} \\ &= \frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx}_{1} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2 &= \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda^2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}}{2!} dx}_{1} = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

(e)

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \qquad e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X(X-1) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k-1)\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= (\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda})\lambda^2 = \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 &= \lambda^2 + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda \\
var(X) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
Y_i \sim E_{x_\lambda} &\Rightarrow \mathbb{E}Y_i = \frac{1}{\lambda} \\
X \sim Er_{n,\lambda} &\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}X = \frac{n}{\lambda}
\end{aligned}$$

(g)

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{E}X = 0 \qquad (Symmetrie)$$

$$\begin{aligned}
varX &= \mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2}\pi}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(xe^{-\frac{x^2}{2}})}{\sqrt{2}\pi} \\
&= \underbrace{\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2}\pi}|_{-\infty}^{\infty}}_{0} \qquad + \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2}\pi}dx}_{1} \qquad = 1
\end{aligned}$$

$$Y = \sigma X \qquad \Rightarrow \qquad var(Y) = \sigma^2 var(X)$$

$$var(Y) = \sigma^2$$

7. Ein Würfel wird solange geworfen bis zum 10-ten Mal eine 6 erscheint. Die Anzahl der notwendigen Würfe soll erraten werden. Wie würden Sie tippen wenn

   (a) nur ein richtiger Tip honoriert wird?
   (b) ein Pönal im Ausmaß der absoluten Differenz zwischen Ihrem Tip und dem tatsächlichen Ausgang zu bezahlen ist?
   (c) ein Pönal im Ausmaß des Quadrats zwischen Ausgang und Tip zu zahlen ist?

   Hinweis: überlegen Sie sich wie die Würfelwürfe verteilt sind. Wenn nur ein richtiger Tip honoriert wird sollte man nicht jenen Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit tippen.

   Lg:

   (a)

$$X \ldots \text{Anzahl der Würfe bis zum 10-ten 6er}$$
$$X \sim neg.bin_{10,\frac{1}{6}}$$
$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{9}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-10}$$
$$\frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X = n-1)} = \frac{(n-1)!9!(n-11)!}{9!(n-10)!(n-2)!}\frac{5}{6} \geq 1$$
$$5(n-1) \geq 6(n-10) \qquad \Leftrightarrow \qquad n \leq 55$$
$$\Rightarrow \qquad Modus = 55, 54 \quad da \quad \frac{\mathbb{P}(X = 55)}{\mathbb{P}(X = 54)} = 1$$
$$\mathbb{P}(54) = \mathbb{P}(55) = 0.02404776$$

   (b)

$$\Rightarrow \qquad Median \qquad \mathbb{P}(X \leq 57) = 0.4840256$$
$$\mathbb{P}(X \leq 58) = 0.5075685 \qquad \Rightarrow \qquad Median = 58$$

   (c)

$$\mathbb{E}X = 10 \cdot 6 = 60$$

8. Sei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}$.
   Eine Folge $(\xi_{i+1}(\omega), \ldots, \xi_{i+k}(\omega))$ heißt ein *Run* der Länge k, wenn $i = 0$ oder $\xi_i(\omega) \neq \xi_{i+1}(\omega)$, wenn weiters $\xi_{i+1}(\omega) = \ldots = \xi_{i+k}(\omega)$ und wenn $i + k = n$ oder $\xi_{i+k}(\omega) \neq \xi_{i+k+1}(\omega)$. Die Anzahl der *Runs* in $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)$ bezeichnen wir mit $R(\omega)$.

(a) Man berechne $\mathbb{E}R$ und $\mathbb{V}R$.

(b) Man versuche zu beurteilen, ob die untenstehende Folge tatsächlich durch das Werfen einer Münze entstanden ist oder, ob es sich eher um eine willkürlich hingeschriebene Folge handelt:
10101101001011000101100101011000101010011001010100.

Hinweis:

$$\text{Sei } \eta_i = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi_i \neq \xi_{i+1} \quad i = 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie kann man R mit Hilfe der η_i darstellen? Hat man diese Darstellung, so folgen die Ergebnisse sehr leicht aus der Additivität des Erwartungswerts.
b) Man verwende die Tschebyscheffsche Ungleichung.

Lg:

(a) $p = \mathbb{P}(\xi_i = 1) = \frac{1}{2}, q = 1 - p = \frac{1}{2}$

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{für } \ \xi_i \neq \xi_{i-1} \ i = 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$R = 1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$

$$\mathbb{P}(\eta_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = 1, \xi_{i-1} = 0 \vee \xi_i = 0, \xi_{i-1} = 1) = 2p(1-p) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(1 + \sum_{i=2}^{n} \eta_i\right) &= \mathbb{E}1 + \left(\mathbb{E}\sum_{i=2}^{n} \eta_i\right) = \\ &= 1 + (n-1)\mathbb{P}(\eta_i) = \\ &= 1 + 2(n-1)pq = 25.5 \\ & \quad \text{für } n = 50, p = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$|j - i| > 1 : \quad \mathbb{E}\eta_i\eta_j = \mathbb{P}(\eta_i = 1)\mathbb{P}(\eta_j = 1) = 4p^2q^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} j = i + 1 : \quad \mathbb{E}\eta_i\eta_{i+1} = \mathbb{P}(&\xi_{i-1} = 1, \xi_i = 0, \xi_{i+1} = 1 \ \vee \\ &\xi_{i-1} = 0, \xi_i = 1, \xi_{i+1} = 0) = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\forall i, j \Rightarrow \mathbb{E}\eta_i\eta_j = \mathbb{E}\eta_i\mathbb{E}\eta_j$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}R &= \sum \mathbb{V}\eta_i = (n-1)\mathbb{V}\eta_2 = \frac{n-1}{4} \\
\mathbb{V}\eta_2 &= \mathbb{E}\eta_2^2 - (\mathbb{E}\eta_2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

(b) $n = 50, \mathbb{E}R = 25.5, \quad \mathbb{V}R = \frac{49}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{7}{2} = 3.5$
aber $R(\omega) = 36$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|R - \mathbb{E}R| \geq \sqrt{\lambda}\sigma) \leq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{10.5}{3.5} = 3 \Rightarrow \lambda = 9 \\
&\mathbb{P}(|R - \mathbb{E}R| \geq \sqrt{\lambda}\sigma) \leq \frac{1}{9}
\end{aligned}
$$

9. Man zeige, dass für eine Folge (X_n) unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariablen gilt:

$$
\mathbb{E}X_n = \infty \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \infty \quad \text{P-fs..}
$$

Lg:

$$
\mathbb{E}X = \infty \Rightarrow \mathbb{E}X^- < \infty \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^- \to \mathbb{E}X^- \text{ fs.}
$$

$$
X_{n,m}^+ := \begin{cases} X_n^+, & X_n \leq M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
$$

$$
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i,M}^+ \to \mathbb{E}X_M^+ \;\wedge\; \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_{i,M}^+ \leq \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^+ \quad \forall M
$$

$$
\begin{gathered}
\lim_{M\to\infty} X_{n,M}^+ = X_n^+ \;\forall n \quad X_M^+ \nearrow_M X^+ \Rightarrow \\
\infty = \mathbb{E}X^+ = \lim \mathbb{E}X_M^+ \Rightarrow \frac{1}{n}\sum X_i^+ \to \infty
\end{gathered}
$$

10. Man zeige, dass eine Zufallsvariable X genau dann integrierbar ist, wenn

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > i) < \infty
$$

und, dass dann gilt:

$$
\lim_{n\to\infty} nP(|X| > n) = 0
$$

Lg:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(|X|>n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(k<|X|\leq k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(k<|X|<k+1)\sum_{n=1}^{\infty} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(k<|X|<k+1) \\
&\leq \int XdP \\
&\leq \sum^{k}(k+1)P(k<|X|<k+1) \\
\text{da} &\ \sum k\mathbb{1}_{[k<|X|\leq k+1]} \leq X \leq \sum(k+1)\mathbb{1}_{[k<|X|\leq k+1]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P|X|>n) &< \infty \\
&\Rightarrow \exists n_\epsilon : n>m>n_\epsilon \\
&\Rightarrow (n-m)P(|X|>n) \\
&\leq \sum_{i=m+1}^{n} P(|X|>i) \\
&< \epsilon \qquad m=n/2 \\
&\Rightarrow P(|X|>n)<\epsilon \\
&\Rightarrow nP(|X|>n)<\epsilon
\end{aligned}$$

alternativ:

$$\begin{aligned}
Y_n := &\quad n\mathbb{1}_{[|X|\geq n]} \searrow 0 \ \wedge\ 0\leq Y_n\leq |X| \\
\Rightarrow &\quad \text{(Konvergenz durch Majorisierung)} \\
\Rightarrow &\quad \lim \mathbb{E}Y_n = \lim_n n\mathbb{P}(|X|\geq n) = \mathbb{E}\lim Y_n = \mathbb{E}0 = 0
\end{aligned}$$

11. Berechnen Sie die Momenterzeugende $M_x(t) := \mathbb{E}e^{tx}$ der folgenden Zufallsvariablen:

    (a) $X \sim B_p$.

    (b) $X \sim B_{n,p}$.

    (c) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

    (d) $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

Lg:

(a) $\mathbb{E}e^{tx} = e^{t0}(1-p) + pe^t = p(e^t-1)+1$

(b) $M_x(t) = (M_{B_p}(t))^n = [1+p(e^t-1)]^n$

(c) $X \sim N(0,1) \Rightarrow M_x(t) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+tx}dx =$
$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x^2-2tx+t^2)}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \sigma Y + \mu \quad Y \sim N(0,1) \Rightarrow M_X(t) = e^{t\mu + \frac{\sigma^2+t^2}{2}}$

(d) $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \Rightarrow$

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{1-\beta t}{\beta}\right)^\alpha \frac{x^{\alpha-1}e^{-x(\frac{1-t\beta}{\beta})}}{\Gamma(\alpha)} dx}_{=1=\frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}}$$

12. Für 2 unabhängige Zufallsvariable $X_1,\ X_2$ berechne man: $\mathbb{E}X_i,\ var(X_i)$ und die Verteilung von $X_1 + X_2$, wenn gilt:

(a) $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$

(b) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

Lg:

(a)

$$\begin{aligned}
M_{X_1+X_2}(t) &= \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_2}} = \frac{1}{(1-\beta t)_1^\alpha + \alpha_2} \Rightarrow \\
X_1 + X_2 &\sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta) \\
M'(t) &= (-\alpha)(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta) = \alpha\beta = \mathbb{E}X \\
M''(t) &= (-\alpha)(-\alpha-1)(1-\beta t)^{-\alpha-2}(-\beta)^2 \Rightarrow \\
varX &= \beta^2\alpha(\alpha+1) - \alpha^2\beta^2 = \beta^2\alpha
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
M'(t) &= (e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}})' = (\mu + \sigma^2 t)e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \Rightarrow \\
\mathbb{E}X &= M'(0) \\
M''(t) &= e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}[\sigma^2 + (\mu+\sigma^2 t)^2] \Rightarrow \\
M''(0) &= \sigma^2 + \mu^2 \Rightarrow varX = \sigma^2 \\
M_{X_1+X_2}(t) &= e^{t(\mu_1+\mu_2)+\frac{t^1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \Rightarrow \\
X_1 + X_2 &\sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)
\end{aligned}$$

13. Man beweise, dass aus $X_n \Rightarrow X$ folgt: $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n|$.

Lg:
Skorochod $\Rightarrow \exists\, Y_n \sim X_n, Y \sim X$ und $Y_n \to Y$ P-fs $\Rightarrow |Y_n| \to |Y|$ P-fs
$0 \leq |Y_n|$ Lemma von Fatou $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}|Y| = \mathbb{E}\underline{\lim}|Y_n| \leq \underline{\lim}\mathbb{E}|Y_n| = \underline{\lim}\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|X|$

3.7 Faltung

1. Man zeige, dass für Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P_i, \quad i = 1,2,3$ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ gilt:

   (a) $P_1 * P_2(A) := \int P_1(A-y)P_2(dy), \quad A \in \mathfrak{B}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. ($P_1 * P_2$ wird Faltung von P_1 und P_2 genannt.)

   (b) $P_1 * P_2 = P_2 * P_1$

   (c) $(P_1 * P_2) * P_3 = P_1 * (P_2 * P_3)$

   (d) Sind X_1, X_2 2 unabhängige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega\mathfrak{S}, P)$ mit $P_i = PX_i^{-1}, \quad i = 1,2$, so gilt: $P_1 * P_2 = P(X_1+X_2)^{-1}$.

   (e) $P_i \ll \lambda \Rightarrow P_1 * P_2 \ll \lambda \ \wedge \ \frac{dP_1 * P_2}{d\lambda}(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dP_1}{d\lambda}(s-y) \cdot \frac{dP_2}{d\lambda}(y)\lambda dy$

   (Hinweis: Suchen Sie eine Menge $C \in \mathfrak{B}_2$, für die gilt:

   $$C_y = A - y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.)$$

   Lösung:

   Mit $A \in \mathfrak{B}$ gilt auch $A - y \in \mathfrak{B}\, \forall y \in \mathbb{R}$
   $P_1(A-y) = \int \mathbb{1}_{A-y}(x)dP_1(x) = \int \mathbb{1}_{C_y}(x)dP_1(x)$
   mit $C = \{(x,y) : x+y \in A\}$

   Somit $\int P_1(A-y)dP_2(y) = \int \big(\int \mathbb{1}_{C_y}(x)dP_1(x)\big)dP_2(y) = \text{(Fubini)} = \int \mathbb{1}_C(x,y)dP_1 \otimes P_2(x,y) = \int \big(\int \mathbb{1}_{C_x}(y)dP_2\big)dP_1 = \int P_2(A-x)dP_1(x)$

   (c) Mit $P_i = PX_i^{-1}$ gilt:
   $\int \mathbb{1}_C(x,y)dPX_1^{-1} \otimes PX_2^{-1} = PX_1^{-1} \otimes PX_2^{-1}(C) = P_1 \otimes P_2(\{(x,y) : x+y \in B\}) = P(\{w : X_1(w)+X_2(w) \in B\}) = P(X_1+X_2)^{-1}(B)$

   (b) $(P_1 * P_2) * P_3 = \int P_1 * P_2(A-z)dP_3(z) = \int\int P_2(A-z-x)dP_1(x)dP_3(z) = \text{(Fubini)} = \int \big(\int P_2(A-z-x)P_3(dz)\big)dP_1(x) = \int P_2 * P_3(A-x)dP_1(x) = (P_2 * P_3) * P_1 = P_1 * (P_2 * P_3)$

   (d) $P_1 * P_2(A) = \int \big(\int_{A-y} f_1(x)d\lambda(x)\big) f_2(y)d\lambda(y) = \int_{T(A)} \int f_1(x)d\lambda T^{-1}(x)f_2(y)d\lambda(y)$

   (mit $T(x) := x - y$ gilt $\lambda T^{-1} = \lambda$ (Translationsinvarianz und $T(A) = A - y$))
   $= \int \int_A f_1(T(x))d\lambda(x)f_2(y)d\lambda(y) = \int_A \big[\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)f_2(y)d\lambda(y)\big]d\lambda(x)$

   Aber unbestimmtes Integral ist klarerweise $P_1 * P_2 \ll \lambda$

2. Bestimmen Sie folgende Faltungen:

   (a) $B_{n-1,p} * B_p$ (Binomial- und Bernoulliverteilung)

(b) $negB_{n-1,p}*G_p$ (negative Binomial- und geometrische Verteilung)

(c) $Er_{n-1,\lambda} * Ex_\lambda$ (Erlang- und Exponentialverteilung)

(d) $B_{n,p} * B_{m,p}$

(e) $negB_{n,p} * negB_{m,p}$

(f) $Er_{n,\lambda} * Er_{m,\lambda}$

Lösung:

(a) $B_{n-1,p}*B_p(k) = \binom{n-1}{k}(1-p)^{n-1-k}p^k B_p(0) + \binom{n-1}{k-1}(1-p)^{n-k}p^{k-1}B_p(1) = p^k(1-p)^{n-k}\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
$\Rightarrow B_{n-1,p} * B_p = B_{n,p}$

(d) vollständige Induktion ergibt: $B_{n,p} * B_{m,p} = B_{n+m,p}$
vollständige Induktion ergibt: $B_{n,p} = \underbrace{B_p * \cdots * B_p}_{n-\text{mal}}$

(c) $f(z) = \int_0^z \frac{\lambda^{n-1}x^{n-2}e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(z-x)}}{(n-2)!}dx = \frac{\lambda^n e^{-\lambda z}}{(n-2)!}\int_0^z x^{n-2}dx = \frac{\lambda^n z^{n-1}e^{-\lambda z}}{(n-1)!}$

(f) Klarerweise $Er_{n,\lambda} = \underbrace{Ex_\lambda * \cdots * Ex_\lambda}_{n-\text{mal}}$
$\Rightarrow Er_{n,\lambda} * Er_{m,\lambda} = Er_{n+m,\lambda}$

3.8 Integralungleichungen

1. Man zeige, dass für 2 Zufallsvariable X, Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt:

   (a) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow (\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ (Ljapunoff-Ungleichung)

   (b) $X \geq 0, p > 0 \Rightarrow \frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} \leq \mathbb{E}\frac{1}{X^p}$

   Lösung:

   (a)

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \quad &\Rightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} < 1 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad x > 0 \,\text{ist konvex} \\ &\Rightarrow \quad \text{(Jensen-Ungl.)} \Rightarrow (\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq \mathbb{E}\big((|X|^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}\big) = \mathbb{E}|X|^\beta \\ &\Rightarrow \quad (\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \end{aligned}$$

   (b) $f(x) = x^{-p} \Rightarrow f''(x) = p(p+1)x^{-p-2} > 0 \Rightarrow f$ konvex
   $\Rightarrow f(\mathbb{E}X) = \frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} \leq \mathbb{E}f(X) = \mathbb{E}\frac{1}{X^p}$

3.9 Gesetz der grossen Zahlen

1. Man berechne das Integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$ numerisch mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahlen. Das Ergebnis soll mit 90-prozentiger Sicherheit um nicht mehr als $\varepsilon = 0.01$ vom wahren Wert abweichen.

   Hinweis: Welchen Erwartungswert hat die Zufallsvariable

$$\eta = \frac{\cos \xi}{\xi} \quad \text{mit} \quad \xi \text{ vt } S_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})}?$$

   Lg:

$$I := \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{4}{\pi}}_{\text{Dichte}} \frac{\cos x}{x} dx = \mathbb{E}\left(\frac{\cos \xi}{\xi}\right) \quad \text{mit} \quad \xi \quad \text{vt} \quad S_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})} \Rightarrow$$

$$\bar{\eta_n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos \xi_i}{\xi_i}\right)}{n} \to \frac{4}{\pi} I$$

   Aus der Tschebyscheffschen Ungleichung folgt:

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(|\bar{\eta_n} - \frac{4}{\pi} I| \geq \frac{\sqrt{\lambda}\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\pi}{4}\bar{\eta_n} - I\right| \geq \frac{\sqrt{\lambda}\sigma\pi}{4\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{\lambda} = 0.1$$

$$\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{\lambda}\sigma}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{\pi^2 \lambda \sigma^2}{16\varepsilon^2} \leq n \Rightarrow n \geq \frac{10\pi^2}{16} 10^4 \sigma^2 = 6250\pi^2\sigma^2$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathbb{V}(\frac{\cos\xi}{\xi}) = \\
&= \mathbb{E}(\frac{\cos\xi}{\xi})^2 - (\mathbb{E}\frac{\cos\xi}{\xi})^2 \le \mathbb{E}(\frac{\cos\xi}{\xi})^2 = \mathbb{E}\eta^2 = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x}\frac{4}{\pi}dx \le \frac{4}{\pi}\cos^2\frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^{-2}dx = \\
&= \frac{4}{\pi}\cos^2\frac{\pi}{4}x^{-1}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow \quad n \ge 61685\cos^2\frac{\pi}{4} = 61685\cdot\frac{1}{2} \approx 30843
\end{aligned}
$$

2. Sei $f(x)$ eine auf $[a,b]$ integrierbare Funktion mit $K = \min_{a\le x\le b} f(x)$, $M = \max_{a\le x\le b} f(x)$ und sei $I = \int_a^b f(x)dx$. Sind (ξ_i, η_i) $i = 1,\ldots,n$ Paare von unabhängigen Zufallsvariablen ξ_i, η_i, wobei ξ_i verteilt $S_{(a,b)}$ und η_i verteilt $S_{(K,M)}$ $\quad \forall i = 1,\ldots,n$ so können sowohl $\varphi_1 = \frac{M(b-a)}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[f(\xi_i)\le\eta_i]}$ als auch $\varphi_2 = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)$ zur Approximation von I verwendet werden. Man begründe dies. Welche der beiden Abschätzungen ist vorzuziehen? (Man vergleiche die Varianzen von φ_1 und φ_2.) Was bedeutet eine kleinere Varianz für die Anzahl der benötigten Zufallszahlen?

Lg:

$$\text{GGZ} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[f(\xi_i)\leq \eta_i]} & \xrightarrow{fs} \frac{I}{M(b-a)} = p \\ \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) & \xrightarrow{fs} \mathbb{E}f(\xi_i) = \\ & = \int_a^b f(t)\frac{1}{b-a}dt = \frac{I}{b-a} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\varphi_1 &= \frac{M^2(b-a)^2}{n}pq = \\ &= \frac{M^2(b-a)^2}{n}\frac{I}{M(b-a)}\frac{M(b-a)-I}{M(b-a)} = \\ &= \frac{IM(b-a)-I^2}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\varphi_2 &= \frac{(b-a)^2}{n}\mathbb{V}f(\xi_1) = \\ &= \frac{(b-a)^2}{n}\left[\int_a^b \frac{f^2(t)}{b-a}dt - \left(\frac{I}{b-a}\right)^2\right] \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{n}\left[\int_a^b \frac{Mf(t)}{b-a}dt - \left(\frac{I}{b-a}\right)^2\right] = \\ &= \frac{IM(b-a)-I^2}{n} = \mathbb{V}\varphi_1 \end{aligned}$$

Aus dem ZGS folgt mit $\sigma^2 = \mathbb{V}f(\xi_1)$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_1^n f(\xi_i) - \frac{nI}{b-a}}{\sqrt{n}\sigma}\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \left|\frac{\sum_1^n f(\xi_i) - \frac{nI}{b-a}}{\sqrt{n}\sigma}\right| = \\ = \quad & \left|\frac{\varphi_2 - I}{\frac{\sigma(b-a)}{\sqrt{n}}}\right| = \left|\frac{\varphi_2 - I}{\sqrt{\mathbb{V}\varphi_2}}\right| \\ \text{wegen } \mathbb{V}\varphi_2 \quad = \quad & \frac{(b-a)^2\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\varphi_2 - I}{\sqrt{\mathbb{V}\varphi_2}}\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(|\varphi_2 - I| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\mathbb{V}\varphi_2}\right) \\ &\approx 1-\alpha \end{aligned}$$

Analog sieht man

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\varphi_1 - I}{\sqrt{\mathbb{V}\varphi_1}}\right| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &= \mathbb{P}\left(|\varphi_1 - I| \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\mathbb{V}\varphi_1}\right) \\ &\approx 1-\alpha \end{aligned}$$

D.h. je kleiner die Varianz, desto besser die Abschätzung bei gleichem n.

3. Ein Versuch besitze die möglichen Ausgänge $\Omega = \{x_1, \ldots, x_m\}$ und die Wvt $P = (p_1, \ldots, p_m)$. Ein Spieler beginnt mit einem Startkapital S_0 zu spielen. Er setzt einen Anteil b_1 seines Kapitals auf den Ausgang x_1, b_2 auf den Ausgang x_2 usw. ($0 \leq b_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^m b_i = 1$). Für den richtigen Tip bekommt er das m-fache seines Einsatzes ausbezahlt, die Einsätze, die er auf andere Ausgänge gesetzt hat, gehen verloren. Endet der 1-te Versuch auf x_i so bekommt er $S_1 = m \cdot b_i \cdot S_0$ ausbezahlt. Der erzielte Gewinn wird wieder im Verhältnis $b_1 : b_2 : \ldots : b_m$ auf die einzelnen Ausgänge aufgeteilt. Dieser Vorgang wird n-mal wiederholt.

   (a) Wie großist das Kapital S_n des Spielers nach n Runden? (Hinweis: S_n ist eine Funktion der Versuchsausgänge $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und daher eine Zufallsvariable.)

   (b) Wie groß wird $\frac{1}{n} \cdot \log S_n$ für groß es n sein? (Man verwende das GGZ).

   (c) Der Spieler teile sein Kapital nun im Verhältnis der Wahrscheinlichkeit der Ausgänge auf, also $b_i = p_i \ \forall \ i$. Dabei sammelt der Spieler nach n Runden ein Kapital $\hat{S}_n$ an. Wie groß ist $\hat{S}_n$? Gegen welchen Wert konvergiert $\frac{1}{n} \cdot \log \hat{S}_n$?

   (d) Man zeige:

$$\sum_{i=1}^m p_i \log p_i \geq \sum_{i=1}^m p_i \log b_i$$
$$\forall \ (b_1, \ldots, b_m) \ 0 \leq b_i \leq 1, \sum_{i=1}^m b_i \leq 1$$
$$(\text{Hinweis: } \log x \leq x - 1)$$

   (e) Man vergleiche $\log \hat{S}_n$ nun mit $\log S_n$. Ist es sinnvoll das Kapital anders als auf die in *c)* beschriebene Weise aufzuteilen?

Hinweis: Es wird wohl das Beste sein, wenn man a) und b) gemeinsam betrachtet. Wie S_n auszusehen hat, ist nicht schwer zu bestimmen. Gegen welchen Wert wird $\frac{1}{n}\log S_n$ auf Grund des GGZ konvergieren?
c) sollte nach b) keine Schwierigkeit mehr sein.
d) Man betrachte

$$\sum_{1}^{m} p_i \log b_i - \sum_{1}^{m} p_i \log p_i = \sum_{1}^{m} p_i \log \frac{b_i}{p_i}$$

e) ist mit Hilfe des Ergebnisses aus d) und b) leicht zu lösen.

Lg:

(a) $S_n = m^n S_0 b_{\xi_1} \dots b_{\xi_n}$

(b) Aus a) folgt

$$\frac{1}{n}\log S_n = \log m + \frac{\log S_0}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \log b_{\xi_i}}{n} \Rightarrow$$

Aus der Additivität des Erwartungswerts folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\frac{1}{n}\log S_n &= \log m + 0 + \mathbb{E}(\log b_{\xi_1}) \Rightarrow \\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\log S_n - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\log S_n\right) \geq \varepsilon\right|\right) &= 0 \end{aligned}$$

(c) $\hat{S}_n = m^n S_0 p_{\xi_1} \dots p_{\xi_n}$

Wegen b) gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\log \hat{S}_n - (\mathbb{E}\log p_{\xi_1} + \log m)\right| \leq \varepsilon\right) \longrightarrow 1$$

(d)

$$\begin{aligned} \sum p_i \log b_i - \sum p_i \log p_i &= \sum p_i \log \frac{b_i}{p_i} \leq \sum p_i \left(\frac{b_i}{p_i} - 1\right) \\ &= \sum b_i - \sum p_i = 0 \end{aligned}$$

(e) Aus d) und b) folgt, daß c) ein besseres Verfahren ist;

2-te Lösung:

$$\text{Sei } A := \{(x_1, \dots, x_n) | b_{x_1} \dots b_{x_n} \geq p_{x_1} \dots p_{x_n} 2^{n\varepsilon}\}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\log S_n \geq \frac{1}{n}\log \hat{S_n} + \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\log b \geq \frac{1}{n}\log p + \varepsilon\right) =$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}\left(\log b_{\xi_1} \dots b_{\xi_n} \geq \log p_{\xi_1} \dots p_{\xi_n} + n\varepsilon\right) = \\ &= \sum_A p(x_i) \leq 2^{-n\varepsilon} \sum_A \prod_i b_{x_i} \leq 2^{-n\varepsilon}. \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen des Lemmas von Borel-Cantelli:

$$\mathbb{P}\left(\lim\ \sup\ \left[\frac{1}{n}\log S_n \geq \frac{1}{n}\log \hat{S_n} + \varepsilon\right]\right) = 0$$

$$\mathbb{P}\left(\lim\ \inf \frac{1}{n}\log S_n \leq \lim \frac{1}{n}\log \hat{S_n} + \varepsilon\right) = 1$$

3.10 Normalverteilung

1. Das Millionenrad der Brieflotterie besteht aus 80 Feldern. Auf 74 Feldern entfallen verschiedene Gewinnsummen x_i, die mitsamt der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens p_i in der folgenden Tabelle aufgelistet sind. Bleibt das Rad auf einem dieser Felder stehen, so erhält der Kandidat den entsprechenden Gewinn, und das Spiel ist beendet.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1Mio.	500 000	100 000	50 000	30 000	20 000	10 000
p_i	$\frac{3}{80}$	$\frac{6}{80}$	$\frac{11}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{10}{80}$

Sechs Felder sind sogenannte Verdopplungsfelder. Stoppt das Rad auf einem dieser Felder, so darf der Kandidat solange weiterspielen, bis das Rad schließlich auf einem der 74 Gewinnfelder zum Stillstand kommt, und der Spieler erhält das 2^{n-1}-fache des Gewinns, wenn das Glücksrad erst im n-ten Durchgang, auf einem Gewinnfeld hält. Jede Woche dürfen 3 Kandidaten an diesem Spiel teilnehmen. Wieviel Kapital muss der Spielbetreiber pro Jahr für die Gewinnausschüttung vorsehen, wenn diese Summe mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\alpha = 0.9$, nicht überschritten werden soll?

Hinweis: Wenn man bedenkt, daß

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum \xi_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) = \mathbb{P}hi(b)$$

ist, wird klar, dass man zuerst die Varianz und den Erwartungswert benötigt. Und natürlich benötigt man auch wieder eine Tabelle für $\mathbb{P}hi(x)$.

Lg:

$$q = 1 - \sum_{i=1}^{7} p_i = \frac{6}{80}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß das Rad auf einem Verdopplungsfeld hält.
$G\ldots$ Gewinn eines Kandidaten

$$C := \sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 109625$$

$$Q := \sum_{i=1}^{7} x_i^2 p_i = 5.8438 \cdot 10^{10}$$

Erwartungswert und Varianz berechnen sich so:
$t\ldots$ Anzahl der Verdoppelungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}G &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{7} 2^t x_i p_i q^t = C\sum_{t=0}^{\infty}(2q)^t = \\
&= C\frac{1}{1-2q} = \frac{80}{68}C = 128970 \\
\\
\mathbb{E}G^2 &= \sum_{t=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{7} 2^{2t} x_i^2 p_i q^t = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 p_i \sum_{t=0}^{\infty}(4q)^t = \\
Q\frac{1}{1-4q} &= \frac{80}{56}Q = \frac{10}{7}Q \Rightarrow \\
\\
\Rightarrow \mathbb{V}G &= \mathbb{E}G^2 - (\mathbb{E}G)^2 = \\
&= \frac{10}{7}Q - \frac{400}{289}C^2 = 6.6849 \cdot 10^{10} \\
&\Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\mathbb{V}G} = 258553
\end{aligned}$$

Wenn pro Jahr 156 Kandidaten spielen, so ist die durchschnittliche Jahresgewinnsumme : $J = 156 \cdot \mathbb{E}G = 20119414$
Aufgrund des Grenzverteilungssatzes (siehe Satz 8.1, Seite 113ff) gilt:
$\mathbb{P}(Jahresgewinn \le J + u_{1-\alpha}\sigma\sqrt{156}) = 1 - \alpha$
Wobei $u_{1-\alpha}$ das α Fraktile der Standardnormalvt ist. Der Wert für die Gewinnobergrenze beträgt daher 24258000 ($u_{1-\alpha} = 1,2816$).

2. Unter $2N+1$ Personen wird eine Abstimmung über ein Projekt durchgefürt. n Personen sind für das Projekt der Rest ist gleichgültig und entscheidet mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 für oder gegen das Projekt. Wie groß muss n sein damit die Befürworter mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 gewinnen. Berechnen Sie n konkret für N=500 000.

Lg:

$$\xi_i \sim A_{0.5} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sim B_{n,0.5} \quad S_n = \sum_{i=1}^{2N+1-n} \xi_i$$

$$\mathbb{P}(S_n \geq 2N+1-n) = 1 - \mathbb{P}(S_n \leq 2N+1-n) = 0.99$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{2N+1-n-np}{\sqrt{npq}}\Big) = 0.99$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi^{-1}(0.01) = \frac{2N+1-n-np}{\sqrt{npq}}$$

$\Leftrightarrow$ Die Gleichung nach n auflösen.

3. Ein Stadion hat 50 000 Sitzplätze. Erfahrungsgemäß werden 10% der Vorbestellungen storniert. Wieviele Vorbestellungen darf ein Veranstalter annehmen wenn eine überbuchung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 vermieden werden soll.

   Hinweis: Dieses Beispiel ist eine einfache Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes.

   Lg:

$$S := 50\ 000 \quad X_i = 1 \text{ wenn die Vorbestellung aufrecht bleibt}$$

$$X_i \sim A_p \quad p := 0.9$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i \geq S\Big) &= \mathbb{P}\Big(\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - pN}{\sqrt{Npq}} > \frac{S - Np}{\sqrt{Npq}}\Big) \\ &= \Phi\Big(\frac{S-Np}{\sqrt{Npq}}\Big) = \alpha \\ &\Rightarrow \xi_\alpha := \frac{S-Np}{\sqrt{Npq}} \end{aligned}$$

$$S^2 + N^2p^2 - 2NSp = \xi_\alpha^2 Npq$$

$$N^2p^2 - N(2Sp + \xi_\alpha^2 pq) + S^2 = 0$$

$$N_{1,2} = \frac{2Sp + \xi_\alpha^2 pq \pm \sqrt{2(Sp + \xi_\alpha^2 pq) - 4p^2S^2}}{2p^2} = 54\,746.76$$

4. Eine Fabrik erzeugt 10 000 Einheiten pro Arbeitsschicht. Die Einheiten sind mit der Wahrscheinlickeit von 0.05 defekt. Die Einheiten werden sofort nach ihrer Erzeugung kontrolliert und defekte Stücke werden in einem Behälter gesammelt der am Ende jeder Schicht entleert wird. Wieviele Stücke muss dieser Behälter fassen können damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 nicht wärend einer Schicht überfüllt wird?

   Hinweis: Dieses Beispiel ist eine einfache Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes.

   Lg:
   $\xi \ldots$ Anzahl defekter Stücke $\sim B_{n,p}$ mit $n = 10000,\ p = 0.05$
   $x \ldots$ Ausschuß

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi < x) &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} < \frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0.99 \Rightarrow \\ x - np &= \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{npq} \Rightarrow x \geq np + \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{npq} \end{aligned}$$

   Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} np &= 10000 \cdot 0.05 = 500 \\ npq &= 500 \cdot 0.95 = 475 \Rightarrow \\ \sqrt{npq} &\approx 21.8 \quad \Phi(0.99) = 2.3263 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daher:} \quad x &\geq 500 + 2.3263 \cdot 21.8 = 550.71 \Rightarrow \\ x &\geq 551 \end{aligned}$$