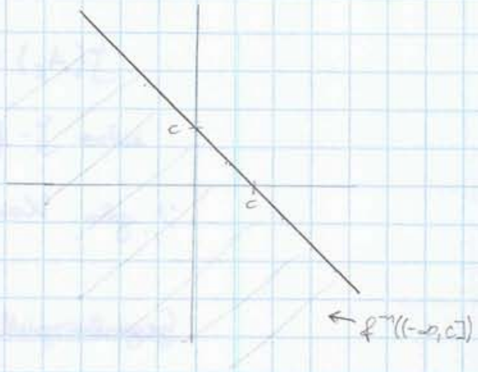
24.11.09

Maß- u. Wahrscheinlichkeitstheorie UE

$\underline{\text{VII}}$)

1) $f: (\mathbb{R}^2, \mathfrak{L}_2) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{L}): \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$



$$\begin{aligned} \sigma(f) = f^{-1}(\mathfrak{L}) &= f^{-1}\left(\mathfrak{A}_\sigma((-\infty, c])\right) \\ &= \mathfrak{A}_\sigma\left(f^{-1}((-\infty, c])\right) \\ &= \mathfrak{A}_\sigma\left(\{(x,y) \mid x+y \le c\}\right) \end{aligned}$$

$(\hat{=}\ \mathbb{R} \times \mathfrak{L}$ um $45°$ gedreht$)$

Äquivalenzklassen: $A_c = \{(x, c-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad (c \in \mathbb{R})$

g $\sigma(f)$-messbar $\Rightarrow g(A_c) = \text{const}$

3) $X: (\mathbb{Z}, \mathfrak{T}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{L}): \quad \omega \mapsto \omega^2 - 2\omega$

$X(\omega) = \omega^2 - 2\omega \Leftrightarrow \omega^2 - 2\omega - X(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \pm \sqrt{1 + X(\omega)} \quad (X(\omega) \ge -1)$

$$X^{-1}(\{d\}) = \begin{cases} \{1-\sqrt{1+d}, 1+\sqrt{1+d}\} & \{d\} \in \mathbb{Z} \wedge d \ge -1 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$\sigma(X) = X^{-1}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{V})$ mit $\mathcal{V} := \{\{1-\sqrt{1+d}, 1+\sqrt{1+d}\} \mid d \in \mathbb{Z} \wedge d \ge -1\}$.

Y $\sigma(X)$-messbar $\Rightarrow Y(1-\sqrt{1+d}) = Y(1+\sqrt{1+d})$.

4) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \zeta)$, $\zeta(A) := |A|$

ZZ.: Konv. im Maß $\Leftrightarrow$ glm. Konv. ζ-fü

glm. Konv. ζ-fü $\Leftrightarrow$ glm. Konv. (wegen $\zeta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \cancel{\forall n \in \mathbb{N}} \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|f_k(n) - f(n)| < \varepsilon \quad \forall k > N(\varepsilon) \ \forall n \in \mathbb{N}$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|f_k - f| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |[|f_k - f| > \varepsilon]| \to 0$ für $k \to \infty \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \zeta([|f_k - f| > \varepsilon]) = 0. \quad \forall \varepsilon > 0$

ZZ: Konv. ϱ-fü $\not\Rightarrow$ ϱ-fast glm. Konv. $\vee$ glm. Konv. ϱ-fü

·) Konv. ϱ-fü $\Leftrightarrow$ punktweise Konvergenz $f_k(n) \to f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

·) ϱ-fast glm. Konv., d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ mit $\varrho(A_\varepsilon) \le \varepsilon$

$\wedge$ f_k konv. auf A_ε^c glm.

$\varrho(A_\varepsilon) \le \varepsilon \ \cancel{\forall} \Rightarrow A_\varepsilon = \emptyset$

also ϱ-fast glm. Konv. $\Leftrightarrow$ glm. Konv.

·) glm. Konv. ϱ-fü $\Leftrightarrow$ glm. Konv.

Gegenbeispiel:

$f_n := \mathbb{1}_{\{1,\dots,n\}}$

$f_n \to f \equiv 1$ punktweise, aber nicht glm.

5) $([0,1], \mathcal{L} \cap [0,1], \lambda)$

a) $X_n(\omega) = \omega^n$

$$\lim_n X_n = \begin{cases} 0 & \omega \in [0,1) \\ 1 & \omega \in \{1\} \end{cases}$$

$\lambda(\{1\}) = 0 \Rightarrow X_n \to 0$ λ-fü.

X_n konv. auf $[0, 1-\varepsilon]$ $0 < \varepsilon < 1$ glm.

$\lambda((1-\varepsilon, 1]) < \varepsilon \Rightarrow X_n \to 0$ λ-fast glm. ~~μ λ-fü glm~~ $\Rightarrow X_n \to 0$ im Maß.

b) $X_n(\omega) = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n \cdot \omega)$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & n \cdot \omega \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_n X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in (\mathbb{N} \cap [0,1]) \Leftrightarrow \omega \in \{0,1\} \\ \nexists & \omega \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}) \cap [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\lambda(\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow X_n \to 0$ λ-fü

λ auf $[0,1]$ total-endlich $\Rightarrow X_n \to 0$ λ-fast glm. $\Rightarrow X_n \to 0$ im Maß

c) $X_n(\omega) = \mathbb{1}_{I_n}(\omega)$ mit $I_n := [\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor, \sqrt{n+1} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in I_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\lambda(I_n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ~~[illegible]~~ $\to 0$ wegen $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \searrow 0$ für $x \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \lambda([|X_n| > \varepsilon]) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda([X_n = 1]) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$

$\Rightarrow X_n \to 0$ im Maß.

6) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$, $P(A) = \sum\limits_{n\in A} 2^{-n}$

a) P-fs, d.h. $\exists N \subseteq \mathbb{N}$ mit $P(N) = 0 \wedge \lim\limits_{k\to\infty} X_k(n) = X(n) \quad \forall n \in N^c$.

$P(N) = 0 \Leftrightarrow N = \emptyset$

$\Rightarrow X_k \to X$ P-fs $\Leftrightarrow X_k \to X$ punktweise.

b) in der WS, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} P([|X_k - X| > \varepsilon]) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$.

$\Leftrightarrow P([|X_k - X| > \varepsilon]) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Sei $j := \min\{n \mid n \in A\}$
$\Rightarrow P(A) = \sum\limits_{m\in A} 2^{-m} \leq \sum\limits_{m=j}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-j+1} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n < 2^{j-1}$

also: Die kleinste Stelle mit $|X_k - X| > \varepsilon$ muss hinreichend groß sein.
$\Rightarrow$ punktweise konvergent.

c) fast glm., d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}$ mit $P(A_\varepsilon) \leq \varepsilon \wedge X_k$ konv. auf A_ε^c glm.

$P(A_\varepsilon) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \min\{n \mid n \in A_\varepsilon\}$ hinreichend groß.

$\Rightarrow X_k$ konv. auf $\{1, \dots, n\}$ glm. $\forall n \in \mathbb{N}$.

bzw. Satz von Egoroff: Konv. punktweise $\Rightarrow$ fast glm. Konv.

7a) Sei $x < y \in C$. $\Rightarrow x = \sum \frac{x_i}{3^i},\ y = \sum \frac{y_i}{3^i}$ mit $x_i, y_i \in \{0,2\}$

ZZ: F ist monoton ↗

Sei $k = \min\{i \mid x_i < y_i\} \Rightarrow x_k = 0,\ y_k = 2$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i/2}{2^i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \frac{x_i/2}{2^i}}_{=\sum_{i=1}^{k-1} \frac{y_i/2}{2^i}} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{x_j/2}{2^j}}_{\le \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k} = \frac{y_k/2}{2^k}}$$

$$\le \sum_{i=1}^{k-1} \frac{y_i/2}{2^i} + \frac{y_k/2}{2^k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{y_j/2}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i/2}{2^i} = F(y)$$

b) ZZ: $F(C) = [0,1]$

Sei $y \in [0,1]$. $\Rightarrow y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} \quad y_i \in \{0,1\}$

$$y = \sum \frac{y_i}{2^i} = \sum \frac{x_j/2}{2^j} = F(x) \Leftrightarrow \cancel{y} \ x_i = 2y_i \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

c) ZZ: F ist stetig.

Wissen: F monoton ↗; $F(\mathbb{R}) = F([0,1]) = F(C) = [0,1]$, also f surjektiv auf $[0,1]$.

Ann.: F an $a \in \mathbb{R}$ unstetig. $\Rightarrow \exists y \in [0,1]$ mit $f(a)^- < y \le f(a)^+$
bzw. $f(a)^- \le y < f(a)^+$.

F ist monoton, $\Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$. ↯ zu f surjektiv.

d) ZZ: F auf $\mathbb{R}\setminus C$ diffbar, $F'(x) = 0$.

Sei $x \in \mathbb{R}\setminus C = C^c$. $\Rightarrow \exists k_0 > 0$ ~~mit~~ sodass $\exists n \in \mathbb{N}, k \le 2^n$ mit $(x - k_0, x + k_0) \in I_{n,k}$

$I_{n,k}$ sind dabei die disjunkten Intervalle, die im n-ten Schritt „herausgeschnitten" werden. $\Rightarrow F(x) = \text{const} \ \forall x \in I_{n,k}$. ⊛

Es gilt ~~also~~ weiters $\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} = C_{n-1}\setminus C_n$ sowie $\mathbb{R}\setminus C = \bigcup_n \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{F(x + \frac{k_0}{n})}^{=F(x)} - F(x)}{\frac{k_0}{n}} = 0.$$

e) Wissen: $\mu_F(\mathbb{R}) = 1$

$$\mu_F(\mathbb{R}\setminus C) = \mu_F(C^c) = \sum_n \sum_{k=1}^{2^n} \mu_F(I_{n,k}) \overset{⊛}{=} 0$$

$\Rightarrow \mu_F(C) = 1$.