# Maß- u. Wahrscheinlichkeitstheorie UE

IV)

1) $\mathcal{C} := \{(a,b] \times (0,1] \mid 0 \le a \le b \le 1\} \cup \{(0,1] \times (a,b] \mid 0 \le a \le b \le 1\} =: \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

$\Omega = (0,1]^2$

$\mu((a,b] \times (0,1]) = \mu((0,1] \times (a,b]) = b-a$

a) $\mathcal{C}$ ist <u>kein Semiring</u>, da

$((a_1,b_1] \times (0,1]) \cap ((0,1] \times (a_2,b_2]) = (a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \notin \mathcal{C}$.

b) $\mu$ additiv, wenn $\exists A_1,\dots,A_n$ mit $\left.\begin{array}{l} A_i \in \mathcal{C} \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$

Da $\nexists$ disjunkte Mengen $A_1, A_2$ mit $A_i \in \mathcal{C}_i$ betrachten wir o.B.d.A nur $\mathcal{C}_1$.

Weil $\mathcal{C}_1$ ein Semiring ist, genügt es, die Additivität für 2 Mengen zu zeigen:

$A_1 := (a_1,b_1] \times (0,1]$, $A_2 := (a_2,b_2] \times (0,1]$

Sei $b_1 = a_2$ (o.B.d.A), dann gilt $A_1 \cup A_2 = (a_1,b_2] \times (0,1] \in \mathcal{C}_1$.

$\Rightarrow \mu(A_1) + \mu(A_2) = \cancel{b_1} - a_1 + b_2 - \cancel{a_2} = b_2 - a_1 = \mu(A_1 \cup A_2)$

Somit ist $\mu$ additiv auf $\mathcal{C}_i$ $i \in \{1,2\}$ und wegen der einleitenden Beobachtung folgt die Additivität auf $\mathcal{C}$.

c) Zunächst ist $\mathcal{J} := \{\bigcap_i A_i \mid A_i \in \mathcal{C}\} = \{(a_1,b_1] \times (a_2,b_2] \mid 0 \le a_i \le b_i \le 1, i \in \{1,2\}\}$ ein Semiring.

Offensichtlich gilt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{J}) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{J})$.

Da $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ durchschnittsstabil ist, folgt $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{C})$ und somit $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}(\mathcal{J})$.

Wegen Satz 2.60 ist $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = \left\{\bigcup_{i=1}^n B_i \mid B_i \in \mathcal{J}, n \in \mathbb{N}\right\}$ und

$\forall C \in \mathcal{R}(\mathcal{C})\ \exists (a_{1j}, b_{1j}] \times (a_{2j}, b_{2j}] \in \mathcal{J}$ mit $C = \bigcup_{j=1}^n (a_{1j}, b_{1j}] \times (a_{2j}, b_{2j}]$.

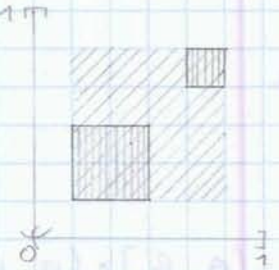
./.

Somit sind

$$\overline{\mu_1}(C) := \sum_{j=1}^{n} (b_{1_j} - a_{1_j})(b_{2_j} - a_{2_j})$$

$$\overline{\mu_2}(C) := \left(\max_{1\le j\le n}\{b_{1_j}\} - \min_{1\le j\le n}\{a_{1_j}\}\right)\left(\max_{1\le j\le n}\{b_{2_j}\} - \min_{1\le j\le n}\{a_{2_j}\}\right)$$

zwei Mengenfunktionen auf $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ mit $\overline{\mu_1}(C) = \overline{\mu_2}(C) = \mu(C) \quad \forall C \in \mathcal{C}$.




2) Es bezeichne $A \in \{„6“, „6^c“\}$ das Würfelergebnis, $B \in \{„ja“, „nein“\}$ die „korrekte“ Antwort und $\tilde{B} \in \{„ja“, „nein“\}$ die gegebene Antwort, so gilt:

$$\hat{p} = \mathbb{P}[\tilde{B} = „ja“] = \mathbb{P}[B = „ja“ \cap A = „6^c“] + \mathbb{P}[B = „nein“ \cap A = „6“]$$

und wegen der Unabhängigkeit von A und B

$$= \mathbb{P}[B = „ja“] \cdot \mathbb{P}[A = „6^c“] + \mathbb{P}[B = „nein“] \cdot \mathbb{P}[A = „6“]$$

$$= p \cdot \frac{5}{6} + (1-p)\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{4}{6}p + \frac{1}{6} \iff p = \left(\hat{p} - \frac{1}{6}\right)\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\hat{p} - \frac{1}{4}$$

3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge unabhängiger Ereignisse; $A_x := \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{A_i}(\omega) = x\}$ $(x \in \mathbb{R})$

<u>ZZ</u>: $\mathbb{P}(A_x) \in \{0,1\}$.

Zunächst eine einfache Überlegung:

$x < 0 \lor x > 1 \Rightarrow A_x = \emptyset$

$x \in (0,1] \Rightarrow \omega \in A_x$ wenn $\omega$ in unendl. vielen $A_i$ enthalten, also $\omega \in \limsup A_i$

$x = 0 \Rightarrow \omega \in A_x$ wenn $\omega$ nur in endl. vielen $A_i$ enth., also $\omega \in (\liminf A_i)^c$

Es folgt also $A_x \in \mathcal{U}_\sigma(A_1, A_2, \ldots) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{A_i}(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{K} 1\!\!1_{A_j}(\omega) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{A_i}(\omega)\right) \quad \forall K: 1 \le K \le n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=K}^{n} 1\!\!1_{A_i}(\omega) \quad \forall K: 1 \le K \le n.$$

$$\Rightarrow A_x \in \mathcal{U}_\sigma(A_K, A_{K+1}, \ldots) \ \forall K \in \mathbb{N} \Rightarrow A_x \in \mathcal{T}_\infty \overset{\text{Kolmogoroffsches Null-Eins-Gesetz}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(A_x) \in \{0,1\}$$

4) Folge $(A_n)$ unabhängiger Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>ZZ:</u> $\Rightarrow |\Omega| > \aleph_0$

Annahme: $|\Omega| \leq \aleph_0$

Wähle $\omega \in \Omega$ fest, sowie

$$B_n(\omega) = \begin{cases} A_n & \omega \in A_n \\ A_n^c & \omega \in A_n^c \end{cases} \Rightarrow \omega \in B_n(\omega)\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\omega)$$

Aufgrund ihrer Konstruktionsvorschrift ist auch $(B_n)$ Folge unabh. Ereignisse.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\omega\}) &\leq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\omega)\Big) = \mathbb{P}\Big(\lim_{N\to\infty} \bigcap_{n=1}^{N} B_n(\omega)\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{N} B_n(\omega)\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(B_n(\omega))}_{=\frac{1}{2}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2^N} = 0 \qquad \forall \omega \in \Omega\end{aligned}$$

Lt. Annahme ist $\Omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} \{\omega\}$, was aber zum Widerspruch führt:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\omega} \{\omega\}\Big) = \sum_{\omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 0 \quad ↯$$

5) $\mathcal{B}_{(1)} := \{B \times \mathbb{R} \mid B \in \mathcal{B}\}$

<u>ZZ:</u> $\lambda_2$ ist nicht $\sigma$-endlich auf $\mathcal{B}_{(1)}$, aber auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$.

$$\lambda_2(B \times \mathbb{R}) = \inf\Big\{\sum_n \lambda(C_n) \cdot \underbrace{\lambda(\mathbb{R})}_{\infty} \ \Big|\ B \subseteq \bigcup_n C_n,\ C_n \in \mathcal{J}\ \forall n \in \mathbb{N}\Big\}$$

$$\Rightarrow \lambda_2(B \times \mathbb{R}) = \begin{cases} 0 & B = \emptyset \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Also $\nexists$ keine ~~Partition~~ Überdeckung von $\mathbb{R}^2$ durch Mengen mit endlichem Maß $\in \mathcal{B}_{(1)}$ $\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{(1)}, \lambda_2)$ nicht $\sigma$-endlich.

Aber $\lambda_2$ $\sigma$-endlich auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$.

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} [-n,n] \times [-n,n] \ \wedge\ \lambda([-n,n]\times[-n,n]) = 4n^2 < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

6) $\mu$ L-S-Maß auf $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k)$, $\mu^*$ äußeres Maß, $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $0 < \theta < 1$.

ZZ: $\mu^*(A \cap (a,b]) \leq \theta \mu((a,b]) \quad \forall a \leq b \Rightarrow \mu^*(A) = 0$.

Annahme: $0 < \mu^*(A) < \infty$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } \frac{\mu^*(A)}{\theta} > \mu^*(A) + \varepsilon$$

und $\exists$ Folge $I_n$ mit $I_n \in \mathcal{J}_k \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \bigcup_n I_n$, sodass

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu(I_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

Einsetzen in die Voraussetzung und Ausnützen der Subadditivität von $\mu^*$ liefert:

$$\frac{\mu^*(A)}{\theta} > \sum_n \mu(I_n) \geq \frac{1}{\theta} \sum_n \mu^*(A \cap I_n) \underset{A \subseteq \bigcup_n (A \cap I_n)}{\geq} \frac{\mu^*(A)}{\theta} \quad \lightning$$

Annahme: $\mu^*(A) = \infty$

$\mu$ ist L-S-Maß, also $\sigma$-endlich, d.h.

$$\exists (B_j) \in \mathcal{B}_k \text{ mit } \mathbb{R}^k = \bigcup_j B_j \wedge \mu(B_j) < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Dann gilt $\mu^*(A \cap B_j) \leq \mu^*(B_j) = \mu(B_j) < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$,

was laut obigen Ergebnissen $\mu^*(A \cap B_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$ liefert.

Wegen $A \subseteq \bigcup_j (A \cap B_j)$ folgt

$$\infty = \mu^*(A) \leq \sum_j \mu^*(A \cap B_j) = 0 \quad \lightning$$

ad 3) ZZ: $A_x \in \mathfrak{A}_\sigma(A_1, A_2, \dots)$

$$\omega \in A_x \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = x$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \text{ mit } \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) - x \right| < \varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon)$$

Sei nun $A_{x,\varepsilon}^k := \{ \omega \in \Omega \mid | \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) - x | < \varepsilon \}$, so gilt

$\omega \in A_x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$ mit $\omega \in A_{x,\varepsilon}^k \ \forall k \geq N(\varepsilon)$, d.h. $\omega \in \bigcap_{k=N(\varepsilon)}^{\infty} A_{x,\varepsilon}^k$

$$x - \varepsilon < \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) < x + \varepsilon \Leftrightarrow k(x-\varepsilon) < \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) < k(x+\varepsilon)$$

$\Rightarrow A_{x,\varepsilon}^k = \{ \omega \in \Omega \mid \omega$ ist in mind. $k(x-\varepsilon)$ u. höchst. $k(x+\varepsilon)$ der $A_1, \dots, A_k$ enth.$\}$

$$= \bigcup_{\lceil k(x-\varepsilon) \rceil \leq m \leq \lfloor k(x+\varepsilon) \rfloor} \left( \bigcup_{\{j_1, \dots, j_m\} \in \{1, \dots, k\}} \bigcap_{h=1}^{m} A_{j_h} \right)$$

also $A_{x,\varepsilon}^k \in \mathfrak{A}_\sigma(A_1, A_2, \dots) \ \forall \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N} \Rightarrow A_x \in \mathfrak{A}_\sigma(A_1, A_2, \dots)$