Maß- und Wahrscheinlichkeitsth. UE

III)

2) Bridge: 52 Blatt, 4 Farben, 4 Spieler $\Rightarrow$ 13 Karten / Farbe, 13 Karten / Spieler

Sei A_i das Ereignis „Spieler i hat 13 gleichfarbige Karten" sowie

$S_k := \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le 4} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{k} A_{i_k}\right)$ das Ereignis „k Spieler haben 13 gleichf. Karten".

13K. d. ausgew. Farbe

$$S_1 = \sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}(A_j) = 4\,\mathbb{P}(A_i) = 4 \cdot 4 \frac{\binom{13}{13}\binom{39}{0}}{\binom{52}{13}} = \frac{16}{\binom{52}{13}}$$

Anz. mögl. Farben

Anzahl 2er-Kombinationen, mögl. Farben Sp. i_1, Sp. i_2

$$S_2 = \sum_{1\le i_1<i_2\le 4} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}) = \binom{4}{2}\frac{4}{\binom{52}{13}}\frac{3}{\binom{39}{13}} = \frac{72}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}}$$

$$S_4 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{4} A_i\right) = \frac{4!}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}}$$

$$S_3 = \binom{4}{3} S_4$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \approx 2{,}52 \cdot 10^{-11}$$

3) Würfelspiel: $S_n \dots$ Gewinn nach n Würfen

$$S_{n+1} := \begin{cases} S_n + 1 & (n+1). \text{ Wurf ist „Sechs"} \\ S_n - 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad S_0 := 0$$

S_n ist sicher negativ, wenn nach n Würfen weniger als $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ Sechser gewürfelt wurden, also:

$$\mathbb{P}[S_n \ge 0] \le \sum_{k=\lceil\frac{n}{2}\rceil}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} = \sum_{k=\lceil\frac{n}{2}\rceil}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^n\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

$$\le \left(\frac{5}{6}\right)^n \binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\sum_{k=\lceil\frac{n}{2}\rceil}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

Aus der Partialsummenfolge der geom. Reihe folgt wegen $\sum_{k=e}^{n} x^k = \frac{x^e - x^{n+1}}{1-x}$ $x \ne 1$

für den letzten Term:

$$\sum_{k=\lceil\frac{n}{2}\rceil}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{5}{4}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\lceil\frac{n}{2}\rceil} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) \le \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{\lceil\frac{n}{2}\rceil} \le \frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n}{2}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$$

Weiters gilt wegen $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$: $\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil} < 2^n$

Somit folgt:

$$\mathbb{P}[S_n \geq 0] \leq \left(\frac{5}{\cancel{6}_3}\right)^n \cancel{2^n} \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n = \frac{5}{4}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \geq 0] \leq \frac{5}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n < \infty, \text{ da } \frac{\sqrt{5}}{3} < 1.$$

Daher folgt aus dem 1. Lemma von Borel-Cantelli:

$\mathbb{P}[\limsup_{n\to\infty} S_n \geq 0] = 0$, also $\exists$ nur endlich viele S_n mit $S_n \geq 0$,

es sind demnach fast alle $S_n < 0$.

4) $\emptyset \in \mathcal{C}$, $f: \mathcal{C} \to \mathbb{R}^+$, $f(\emptyset) = 0$

ZZ.: $\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_n f(C_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_n C_n,\ C_n \in \mathcal{C}\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$

ist äußere Maßfunktion.

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$ ✓

2) $\mu^*(A) \geq 0 \quad \forall A \in P(\Omega)$ lt. Def. von f

3) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B) \quad \forall A, B \in P(\Omega)$

·) trivial für $\mu^*(B) = \infty$

·) $\mu^*(A) < \infty \wedge \mu^*(B) < \infty$:

Wegen $A \subseteq B \subseteq \bigcup_j C_j$ für passende $C_j \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mu^*(B) = \inf\left\{\sum_j f(C_j) \,\middle|\, B \subseteq \bigcup_j C_j\right\}$$

$$\geq \inf\left\{\sum_\ell f(D_\ell) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_\ell D_\ell\right\} = \mu^*(A)$$

$A \subseteq \bigcup_n A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$

4) $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0 \quad \exists (C_{n,m})$ mit $C_{n,m} \in \mathcal{C} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

mit $A_n \subseteq \bigcup_m C_{n,m} \wedge \mu^*(A_n) \leq \sum_m f(C_{n,m}) \leq \mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}$

$$\Rightarrow \mu^*(A) \overset{3)}{\leq} \mu^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_n \bigcup_m C_{n,m}\right)$$

$$\leq \sum_n \sum_m f(C_{n,m}) \leq \sum_n \left(\mu^*(A_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}\right) = \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

ε beliebig $\Rightarrow \mu^*$ ist äußere Maßfunktion.

6) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| < \infty \vee |A^c| < \infty \}$

a) ZZ: $\mathfrak{A}$ ist Algebra.

siehe 2. Übung, Bsp. 6a

b) ZZ:
$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & |A| < \infty \\ 1 & |A| = \infty \end{cases} \quad \text{ist Maß auf } \mathfrak{A}.$$

1) $\mu(\emptyset) = 0$ ✓

2) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}$ ✓

3) (A_n) disjunkt, $A_n \in \mathfrak{A} \; \forall n \in \mathbb{N} \wedge \bigcup_n A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$

1. Fall:

$$\mu(\bigcup_n A_n) = 0 \Leftrightarrow |\bigcup_n A_n| < \infty \Leftrightarrow |A_n| < \infty \; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_n \mu(A_n) = 0$$

2. Fall:

$$\mu(\bigcup_n A_n) = 1 \Leftrightarrow |\bigcup_n A_n| = \infty \Leftrightarrow \exists! \, n \in \mathbb{N} \text{ mit } |A_n| = \infty,$$

denn angenommen, es gilt $|A_k| = |A_l| = \infty$, dann folgt

$$\emptyset = A_k \cap A_l = (A_k^c \cup A_l^c)^c \Leftrightarrow A_k^c \cup A_l^c = \mathbb{R}$$

Ein Widerspruch, da lt. Konstr. von $\mathfrak{A}$: $\cancel{|A_k|} = |A_l^c| < \infty \wedge |A_k^c| < \infty$

Also: $\mu(\bigcup_n A_n) = 1 \Leftrightarrow \sum_n \mu(A_n) = 1$

c) Man bestimme das von μ induzierte äußere Maß μ^*.

$\mu^*(A) := \inf \{ \sum_n \mu(E_n) \mid A \subseteq \bigcup_n E_n, \, E_n \in \mathfrak{A} \; \forall n \in \mathbb{N} \}$

Sei $|A| \leq \aleph_0$, so existiert eine Darstellung $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ $a_i \in \mathfrak{A}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Somit gilt $A \subseteq \bigcup_n \{a_n\}$ und $\sum_n \mu(\{a_n\}) = 0 \Rightarrow \mu^*(A) = 0$

Sei $|A| < \aleph_0$ und $A \subseteq \bigcup_n A_n$ mit $A_n \in \mathfrak{A} \; \forall n \in \mathbb{N}$, dann

$\exists k \in \mathbb{N}$ mit $|A_k| = \infty \Rightarrow \sum_n \mu(A_n) \geq \mu(A_k) = 1$

Andererseits gilt wegen $A \subseteq \Omega$: $\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(\Omega) = \mu(\Omega) = 1$.

$$\Rightarrow \mu^*(A) = \begin{cases} 0 & |A| \leq \aleph_0 \\ 1 & |A| > \aleph_0 \end{cases}$$

d) Man bestimme das System der μ^*-messbaren Mengen.

$A \in P(\Omega)$ ist μ^*-messbar, wenn $\forall B \in P(\Omega)$ gilt:

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

Sei $|A| \leq \aleph_0 \Rightarrow \mu^*(A \cap B) = 0$ und somit

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B \setminus A)$$

$\Rightarrow A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ und aufgrund der Symmetrie $A^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

Sei nun $|A| > \aleph_0 \wedge |A^c| > \aleph_0$, dann gilt

$1 = \mu^*(\Omega) \neq \mu^*(A) + \mu^*(A^c) = 2$ und A ist nicht messbar.

Somit ist $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \in P(\Omega) \mid |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$.

7) μ, ν Maße auf Semiring $\mathcal{J}$ über Ω.

a) ZZ: $(\mu+\nu)^* = \mu^* + \nu^*$

$$(\mu+\nu)^*(A) = \inf\{\sum_n \overbrace{(\mu+\nu)(E_n)}^{\mu(E_n)+\nu(E_n)} \mid A \subseteq \bigcup_n E_n,\ E_n \in \mathcal{J}\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$$\geq \inf\{\sum_i \mu(C_i) \mid A \subseteq \bigcup_i C_i,\ C_i \in \mathcal{J}\ \forall i \in \mathbb{N}\}$$

$$+ \inf\{\sum_j \nu(D_j) \mid A \subseteq \bigcup_j D_j,\ D_j \in \mathcal{J}\ \forall j \in \mathbb{N}\}$$

$$= \mu^*(A) + \nu^*(A)$$

Sei umgekehrt $A \subseteq \bigcup_n A_n$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ und

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

sowie $A \subseteq \bigcup_m B_m$ mit $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ und

$$\nu^*(A) \leq \sum_m \nu(B_m) \leq \nu^*(A) + \delta$$

$\Rightarrow A_n \cap B_m$ ist disj. Überdeckung von A mit

$$\sum_m \mu(A_n \cap B_m) \leq \mu(A_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_n \nu(A_n \cap B_m) \leq \nu(B_m) \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Es gilt weiters:

$$(\mu+\nu)^*(A) \leq \sum_{n,m} (\mu+\nu)(A_n \cap B_m) = \sum_{n,m} (\mu(A_n \cap B_m) + \nu(A_n \cap B_m))$$

$$= \sum_n \sum_m \mu(A_n \cap B_m) + \sum_m \sum_n \nu(A_n \cap B_m)$$

$$\leq \sum_n \mu(A_n) + \sum_m \nu(B_m)$$

$$\leq \mu^*(A) + \nu^*(A) + \varepsilon + \delta$$

b) ZZ: $\mathcal{M}_{(\mu+\nu)^*} \supseteq \mathcal{M}_{\mu^*} \cap \mathcal{M}_{\nu^*}$

Sei $A \in \mathcal{M}_{\mu^*} \cap \mathcal{M}_{\nu^*}$, B beliebig $\in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$\Rightarrow (\mu+\nu)^*(B) \overset{a)}{=} \mu^*(B) + \nu^*(B)$$
$$= \mu^*(B\cap A) + \mu^*(B \cap A^c) + \nu^*(B\cap A) + \nu^*(B \cap A^c)$$
$$= (\mu+\nu)^*(B\cap A) + (\mu+\nu)^*(B\cap A^c)$$

also $A \in \mathcal{M}_{(\mu+\nu)^*}$.

c) ZZ: μ, ν σ-endlich $\Rightarrow \mathcal{M}_{(\mu+\nu)^*} = \mathcal{M}_{\mu^*} \cap \mathcal{M}_{\nu^*}$

μ σ-endlich, d.h. $\exists (E_n)$ $E_n \in \mathcal{J}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $\Omega = \bigcup_n E_n \wedge \mu(E_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ν σ-endlich, d.h. $\exists (F_m)$ $F_m \in \mathcal{J}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ mit $\Omega = \bigcup_m F_m \wedge \nu(F_m) < \infty$ $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \Omega = \bigcup_{n,m} (E_n \cap F_m) \text{ und } (\mu+\nu)(E_n \cap F_m) = \mu(E_n \cap F_m) + \nu(E_n \cap F_m)$$
$$\leq \mu(E_n) + \nu(F_m) < \infty \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

also $\mu+\nu$ ist σ-endlich auf $\mathcal{J}$.

$A \in \mathcal{M}_{(\mu+\nu)^*} \Rightarrow \exists \underline{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$; $\underline{A}, \overline{A} \in \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{J})$ mit

$$(\mu+\nu)^*(A) \underset{\text{S. 4.19}}{=} (\mu+\nu)(\overline{A}) = \mu(\overline{A}) + \nu(\overline{A}) \underset{\text{S. 4.20}}{=} \mu(\underline{A}) + \nu(\underline{A})$$

Wegen $\mu^*(A) \leq \mu(\overline{A})$ und $\nu^*(A) \leq \nu(\overline{A})$ folgt aus $(\mu+\nu)^*(A) = (\mu+\nu)(\overline{A})$:

$\mu^*(A) = \mu(\overline{A})$ sowie $\nu^*(A) = \nu(\overline{A})$

Analog gilt wegen $\mu(\underline{A}) \leq \mu^*(A)$, $\nu(\underline{A}) \leq \nu^*(\underline{A})$ und $(\mu+\nu)(\underline{A}) = (\mu+\nu)^*(A)$:

$\mu^*(A) = \mu(\underline{A})$ und $\nu^*(A) = \nu(\underline{A})$

Es folgt wegen $\overline{A}^c \subseteq A^c \subseteq \underline{A}$:

$$\mu(\Omega) = \mu(\overline{A}) + \mu(\overline{A}^c)$$
$$\leq \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$
$$\leq \mu(\underline{A}) + \mu(\underline{A}^c) = \mu(\Omega)$$

und somit $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

Analog zeigt man $A \in \mathcal{M}_{\nu^*}$.

d) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und μ definiert analog Bsp. 6.

$$\Rightarrow \mu^*(A) = \begin{cases} 0 & |A| \leq \aleph_0 \\ 1 & |A| > \aleph_0 \end{cases} \quad \text{und } \mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$$

Sei weiters $\nu(A) = \nu^*(A) = |A| \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\nu^*} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Man beobachtet

$$|A| = \infty \Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) = \overbrace{\mu^*(A)}^{\in\{0,1\}} + |A| = \infty$$

$$|A| < \infty \Rightarrow (\mu+\nu)^*(A) = 0 + |A| = |A|$$

also $(\mu+\nu)^* = \nu^*$.

Somit gilt $\mathcal{M}_{(\mu+\nu)^*} = \mathcal{M}_{\nu^*} \neq \mathcal{M}_{\mu^*} \cap \mathcal{M}_{\nu^*} = \mathcal{M}_{\mu^*}$.

1) Sei μ ein Maß auf einem Semiring $\mathcal{T}$ ~~≠∅~~ mit $\mu(A) = 1$ für eine Menge $A := A_1 = A_2 = \ldots = A_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$.

$$S(k) := \sum_{k=1}^{k} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu\Big(\underbrace{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}}_{A}\Big) = \sum_{k=1}^{k} (-1)^{k-1} \binom{n}{k}$$

$S(k)$ liefert untere Schranken für $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1$ für ~~ungerades~~ gerades k, obere Schranken für ungerades k. (Ungleichung von Bonferroni)

Untere Schranken sind nicht monoton wachsend, wenn für ein gerades k mit $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$S(k) > S(k+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 > \sum_{k=k+1}^{k+2} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k+2} > \binom{n}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\cancel{n!}}{(k+2)!\,\cancel{(n-k-2)!}} > \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(k+1)!}\,(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k+2}{n-k-1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2k+3 < n$$

Analog: obere Schranken nicht monoton fallend, wenn für ein unger. k mit $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$S(k) < S(k+2) \Leftrightarrow \overset{0}{\cancel{S(k)}} > (-1)\big(S(k+2) - S(k)\big) \Leftrightarrow 2k+3 < n$$

Für $n = 8$ sind demnach beide Schranken nicht monoton:

5) $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $d(A) := \sup \{ |\vec{x} - \vec{y}| \mid \vec{x}, \vec{y} \in A \}$

ZZ: $\mu^*_{m,\varepsilon}(A) := \inf \left\{ \sum_n d(C_n)^m \,\middle|\, A \subseteq \bigcup_n C_n ,\ d(C_n) \leq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}$

ist äußere Maßfunktion.

Wegen $\cancel{d(A)}\, f : P(\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} : A \mapsto d(A)^m$ sowie $f(\emptyset) = 0$

und aufgrunddessen, dass die 0 in der Bildmenge nicht stört,

lässt sich der Beweis von 4) direkt übertragen.

ZZ: $\mu^*_m := \sup_{\varepsilon > 0} \mu^*_{m,\varepsilon}$ ist äußere Maßfunktion.

1) $\mu^*_m(\emptyset) = 0$ ✓

2) $\mu^*_m(A) \geq 0 \quad \forall A \in P(\mathbb{R}^k)$ ✓

3) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*_m(A) \leq \mu^*_m(B)$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt $\mu^*_{m,\varepsilon}(A) \leq \mu^*_{m,\varepsilon}(B) \leq \mu^*_m(B)$

und somit $\mu^*_m(A) \leq \mu^*_m(B)$.

4) $A \subseteq \bigcup_n A_n \Rightarrow \mu^*_m(A) \leq \sum_n \mu^*_m(A_n)$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, so gilt $\mu^*_{m,\varepsilon}(A) \leq \sum_n \mu^*_{m,\varepsilon}(A) \leq \sum_n \mu^*_m(A_n)$

und somit $\mu^*_m(A) \leq \sum_n \mu^*_m(A_n)$.