Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie UE

II, 1) a) ZZ.: $\forall$ (R_n) Folge von Ringen mit $R_n \subseteq R_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow R := \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ ist Ring.

$A \in R \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $A \in R_n$

$B \in R \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ mit $B \in R_k$

Sei o.B.d.A. $k \geq n$, so gilt wegen $R_n \subseteq R_k$, dass auch $A \in R_k$ und aufgrund der Ring-Eigenschaft von R_k auch $B \setminus A$ und $A \cup B$ in R_k liegen, ~~müssen~~ und somit auch in R.

b) ZZ: (R_n) Folge von σ-Ringen mit obigen Eigensch. $\not\Rightarrow R := \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ ist σ-Ring.

Sei $C_n := \{1, \dots, n\}$, dann ist $R_n := P(C_n)$ ein σ-Ring und wegen $C_n \subseteq C_{n+1}$ gilt $P(C_n) \subseteq P(C_{n+1})$, also $R_n \subseteq R_{n+1}$.

$\Rightarrow R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(C_n)$

Da $P(C_n)$ alle (trivialerweise) endlichen Teilmengen von C_n enthält $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt anschaulicher: $\bigcup_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \{$Menge aller endl. Teilmengen von $\mathbb{N}\}$

Es lässt sich somit in R eine Mengenfolge (A_k) mit $A_k = \{k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ bilden. Allerdings ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{N}$ abzählbar und somit laut obiger Überlegung nicht $\in R$.

3) Sei $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ mit $C_i \in \Omega$, $C_i \neq C_j$ $\forall i \neq j$, dann ist $\mathcal{E} := \{ \bigcap_{k=1}^{n} D_k \mid D_k \in \{C_k, C_k^c\}\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω.

Sei nun $\mathcal{F} := \{ \bigcup E \mid E \in \mathcal{E}\}$, dann ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, da

1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$

2) $F \in \mathcal{F}$: $F = \bigcup_{j \in I} E_j$ $E_j \in \mathcal{E}$ $\forall j$ $\Rightarrow F^c = \bigcup_{j \in I^c} E_j \in \mathcal{F}$

3) $(F_n) \in \mathcal{F}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$ lt. Konstruktion.

Wegen $C \subseteq \mathcal{F}$ folgt daher $\mathfrak{A}_\sigma(C) \subseteq \mathcal{F}$.

Umgekehrt muss jede $\mathcal{C}$ umfassende σ-Algebra die Mengen $C_i \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$ enthalten, sowie die Komplemente $C_i^c \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Damit müssen auch deren Durchschnitte enthalten sein, somit gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{C})$; aber auch sämtliche Vereinigungen und daher $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{C})$.

Insgesamt gilt also $\mathcal{F} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{C})$.

Da nicht alle in $\mathcal{E}$ gebildeten Durchschnitte verschieden sein müssen, gilt $|\mathcal{E}| \leq 2^n$ und daher $|\mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{C})| = |\mathcal{F}| = |P(\mathcal{E})| = 2^{|\mathcal{E}|} \leq 2^{2^n}$.

4) ZZ: $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$

„$\Rightarrow$" Wegen $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C})$ folgt $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$

„$\Leftarrow$" Da jeder σ-Ring monoton ist, gilt ~~muss~~ $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C})$.

Für die Umkehrung gehen wir analog dem Beweis von Satz 2.72 vor:

Sei $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid A \setminus B \wedge B \setminus A \wedge A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$

Für eine monotone Folge (B_n) mit $B_i \in \mathcal{M}_A \ \forall i \in \mathbb{N}$ sind $A \setminus B_n$, $B_n \setminus A$, $A \cup B_n$ monoton in $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ und ihr GW wieder $\in \mathcal{M}_A$.

$\Rightarrow \mathcal{M}_A$ ist monoton.

Weiters gilt für $A \in \mathcal{C}$ und bel. $B \in \mathcal{C}$ wegen $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$:

$A \setminus B,\ B \setminus A,\ A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$\Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_A \quad \forall A \in \mathcal{C}$ und aufgrund der Monotonie von $\mathcal{M}_A$ gilt $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_A \quad \forall A \in \mathcal{C}$, d.h. $B \in \mathcal{M}_A \quad \forall A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Letzteres ist äquivalent zu $A \in \mathcal{M}_B \quad \forall A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ [lt. Konstruktion].

Obige Überlegungen liefern wiederum

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_B \quad \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\mathcal{M}_B$ monoton $\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_B \quad \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Nun gilt für beliebige $B_1, B_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ lt. Konstr. von $\mathcal{M}_B$:

$B_1 \setminus B_2,\ B_2 \setminus B_1,\ B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Somit ist $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ein Ring und aufgrund der Monotonie ein σ-Ring.

Es gilt also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$ und insgesamt $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

6) a) $|\Omega| = \infty, \quad \mathcal{C} := \{A \subseteq \Omega \mid |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$

•) $\Omega \in \mathcal{C}$, da $|\Omega^c| = |\emptyset| = 0$

•) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ lt. Konstr.

•) Folge (A_n) mit $A_i \in \mathcal{C} \overset{\forall i \in \mathbb{N}}{\not\Rightarrow} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$

Gegenbsp.: $\Omega = \mathbb{N}$, $A_i := \{2i\} \in \mathcal{C} \ \forall i \in \mathbb{N}$, aber es gilt

$\left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\}\right| = \infty$ als auch $\left|\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\}\right)^c\right| = \left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n-1\}\right| = \infty$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist keine σ-Algebra.

•) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$, da

$|A \cup B| < \infty \Leftrightarrow |A| < \infty \wedge |B| < \infty$

$|A \cup B| = \infty$ sonst, aber $|(A \cup B)^c| = |A^c \cap B^c| < \infty$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist Algebra.

b) Ω beliebig, $\quad \mathcal{C} := \{A \subseteq \Omega \mid |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$

•) $\Omega \in \mathcal{C}$, da $|\Omega^c| = |\emptyset| = 0$

•) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ lt. Konstr.

•) Folge (A_n) mit $A_i \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, da

Falls $\forall$ $|A_i| \leq \aleph_0 \ \forall i \in \mathbb{N}$ ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ als Vereinigung höchst. abz. vieler

höchstens abz. Mengen höchstens abz. und daher $\in \mathcal{C}$

Sonst $\exists i \in \mathbb{N}$ mit $|A_i^c| \leq \aleph_0$.

$\Rightarrow \left|\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c\right| = \left|\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c\right| \leq \aleph_0$ und somit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist σ-Algebra.

c) $|\Omega| = \infty, \quad \mathcal{C} := \{A \subseteq \Omega \mid |A| < \infty\}$

•) $\Omega \notin \mathcal{C}$

•) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{C}$ trivial

•) Folge (A_n) mit $A_i \in \mathcal{C} \ \forall i \in \mathbb{N} \not\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ (siehe Gegenbsp. für a))

•) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$ ✓

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist Ring.

d) $|\Omega| = 2k \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$; $\mathcal{C} = \{A \subseteq \Omega \mid |A| \equiv 0 \bmod 2\}$

•) $\Omega \in \mathcal{C}$, da $|\Omega| = 2k \equiv 0 \bmod 2 \quad \forall k$

•) $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$, da gilt

$|A| \equiv 0 \bmod 2 \Rightarrow |A^c| = |\Omega \setminus A| = |\Omega| - |A| = 2k - |A| \equiv 0 \bmod 2$

•) $A, B \in \mathcal{C} \not\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$

Gegenbsp.: $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $A = \overset{\in \mathcal{C}}{\{1,2\}}$, $B = \overset{\in \mathcal{C}}{\{2,3\}} \Rightarrow A \cup B \notin \mathcal{C}$
wegen $|A \cup B| \equiv 1 \bmod 2$.

•) $A, B \in \mathcal{C} \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$, da

$|A \cap B| = |A| + |B| \equiv 0 \bmod 2.$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ ist Dynkin-System.

Annahme:

7) $\forall$ Sei $|\mathcal{R}_\sigma| = \aleph_0$ und (A_n) eine Folge mit $A_n \in \mathcal{R}_\sigma \ \forall n \in \mathbb{N}$, $A_i \neq A_j \ \forall i \neq j$

und sei $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Es ist $\mathcal{E} := \{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \mid B_n \in \{A_n, A \setminus A_n\}\}$ eine disjunkte Zerlegung von A.

Jedes $A_i \ i \in \mathbb{N}$ lässt sich daher ~~als~~ in eindeutiger Weise als Vereinigung

solcher $E \in \mathcal{E}$ darstellen. Wegen $A_i \neq A_j \ \forall i \neq j$ gilt daher $|\mathcal{E}| = \infty$.

Es gilt $\bigcap B_n \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcap A \setminus B_n \in \mathcal{E}$,

$\bigcap A \setminus B_n = \bigcap (A \cap B_n^c) = A \cap \bigcap B_n^c = A \cap (\bigcup B_n)^c = A \setminus (\bigcup B_n)$

und daher $E \in \mathcal{R}_\sigma \ \forall E \in \mathcal{E}$.

Daher müssen alle Vereinigungen der $E \in \mathcal{E}$ wiederum $\in \mathcal{R}_\sigma$ sein.

Wir definieren nun eine (beliebige) Nummerierung auf den $E \in \mathcal{E}$

und eine Funktion $F: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{R}_\sigma : \{x_n\} \mapsto \bigcup_{i \in \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 1\}} E_i$

z B: $F(1,0,1,\ldots) = E_1 \cup E_3 \cup \ldots$

Lt. Konstruktion gilt $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \neq j$, daher F offensichtlich injektiv,

d.h. $\{x_n\} \neq \{y_n\} \Rightarrow F(\{x_n\}) \neq F(\{y_n\})$.

Da es nach dem 2. Diagonaltheorem von Cantor überabzählbar viele

0,1- Folgen gibt, müssen auch überabzählbar viele Vereinigungen von

$E_i \in \mathcal{E}$ existieren, ein Widerspruch zu $|\mathcal{R}_\sigma| = \aleph_0$.

2) a) ZZ: $A \in \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \exists (C_n) \mid C_n \in \mathcal{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$

Sei $\mathcal{M}_\sigma := \{ B \in \Omega \mid \exists (C_n) \mid C_n \in \mathcal{C}\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \}$

Für beliebige $A, B \in \mathcal{M}_\sigma$ gilt:

$A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i \Rightarrow A \setminus B \subseteq A \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$; also $A\setminus B \in \mathcal{M}_\sigma$

Ist (B_j) eine Folge mit $B_j \in \mathcal{M}_\sigma\ \forall j \in \mathbb{N}$ und $B_j \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{i,j}$, so gilt

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_{i,j} = \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} C_{i,j} = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} C_{(i,j)}$$

Wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ existiert eine Bijektion mit $(i,j) \mapsto k \in \mathbb{N}$

und es folgt: $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} D_k$ mit $D_k \in \mathcal{C}\ \forall k \in \mathbb{N}$, also $\bigcup B_j \in \mathcal{M}_\sigma$

Daher ist $\mathcal{M}$ ein σ-Ring, der trivialerweise auch $\mathcal{C}$ enthält. Somit gilt $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}_\sigma$ und aus $A \in \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{C})$ folgt $A \in \mathcal{M}_\sigma$.

b) Sei $\mathcal{M} := \{ B \in \Omega \mid \exists C_1, \ldots, C_n\ \ C_i \in \mathcal{C},\ i = 1, \ldots, n$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i \}$

Weiter analog ~~wie~~ zu oben.