Maß- u. Wahrscheinlichkeitstheorie UE

I)

1) ZZ: $A \triangle B = C \triangle D \Leftrightarrow A \triangle C = B \triangle D$

$$A \triangle B = C \triangle D \Leftrightarrow (A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = (C \triangle D) \triangle (B \triangle C) = (B \triangle C) \triangle (C \triangle D)$$

$$\Leftrightarrow A \triangle (B \triangle B) \triangle C = B \triangle (C \triangle C) \triangle D$$

$$\Leftrightarrow A \triangle C = B \triangle D$$

2) ZZ: $$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k \right) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \triangle A_{k+1})$$

Sei zunächst $I := \{1, \dots, n\}$ und $\omega \in \Omega$ ein Elementarereignis, so ist die Behauptung äquivalent zu:

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists k \in I \text{ mit } \omega \in A_k\} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_k \ \forall k \in I\} \cup \{\omega \in \Omega \mid \exists k \in I \text{ mit } (\omega \in A_k \wedge \omega \notin A_{k+1}) \vee (\omega \notin A_k \wedge \omega \in A_k)\}$$

Der letzte Term lässt sich vereinfachen zu $\{\omega \in \Omega \mid \exists k, j \in I \text{ mit } \omega \in A_k \wedge \omega \notin A_j\}$. und man erkennt leicht, dass es sich bei der rechten Seite der Behauptung um eine disjunkte Zerlegung der $\bigcup A_k$ handelt.

3) ZZ: $$1\!\!1_{A_1 \triangle \dots \triangle A_n} \equiv \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{A_i} \mod 2$$

Beweis mittels vollst. Induktion:

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 2$

$$1\!\!1_{A_1 \triangle A_2} \equiv (1\!\!1_{A_1} + 1\!\!1_{A_2}) \mod 2 \quad \checkmark$$

<u>Induktionsschritt:</u> $n \mapsto n+1$

$$1\!\!1_{A_1 \triangle \dots \triangle A_{n+1}} = 1\!\!1_{(A_1 \triangle \dots \triangle A_n) \triangle A_{n+1}} \equiv (1\!\!1_{A_1 \triangle \dots \triangle A_n} + 1\!\!1_{A_{n+1}}) \mod 2$$

$$\equiv \left(\left(\sum_{i=1}^{n} 1\!\!1_{A_i} \mod 2 \right) + 1\!\!1_{A_{n+1}} \right) \mod 2 \equiv \sum_{i=1}^{n+1} 1\!\!1_{A_i} \mod 2$$

Direkter Beweis der Folgerung mittels vollst. Ind.:

<u>Induktionsanfang:</u> $n = 2$

$\omega \in A_1 \triangle A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2) \Leftrightarrow \omega$ liegt entweder in A_1 oder A_2 (unger. Anz.)

Induktionsvoraussetzung:

$B := A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$ besteht aus allen Elementen $\omega \in \Omega$, die in einer ungeraden Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ vorkommen.

Induktionsschritt:

4 Fälle:

1) $\omega \in B$, $\omega \in A_{n+1} \Rightarrow \omega \notin B \triangle A_{n+1}$ und ω kommt in einer geraden Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_{n+1}$ vor.

2) $\omega \in B$, $\omega \notin A_{n+1} \Rightarrow \omega \in B \triangle A_{n+1}$ und ω kommt in einer ungeraden Anzahl der Mengen $A_1, \ldots, A_{n+1}$ vor.

3) $\omega \notin B$, $\omega \in A_{n+1} \Rightarrow \omega \in B \triangle A_{n+1}$, analog zu 2)

4) $\omega \notin B$, $\omega \notin A_{n+1} \Rightarrow \omega \notin B \triangle A_{n+1}$, analog zu 1)

4) ZZ:

$$A^c = \Omega \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} (A_1 \times \ldots \times A_{i-1} \times A_i^c \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n)$$

wobei $\Omega := \prod_{i=1}^{n} \Omega_i := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n \quad \Omega_i \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

und $A := \prod_{i=1}^{n} A_i$ mit $A_i \subseteq \Omega_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Bem.: Sei $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, so gilt offensichtlich

$$x \in A \Leftrightarrow x_i \in A_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (1)$$

und daher

$$x \in A^c \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } x_k \in A_k^c.$$

Bezeichne nun k_0 das kleinste k mit obiger Eigenschaft, so ist

$$x \in (A_1 \times \ldots \times A_{k_0-1} \times A_{k_0}^c \times \Omega_{k_0+1} \times \ldots \times \Omega_n)$$

$$\Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} (A_1 \times \ldots \times A_{i-1} \times A_i^c \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n)$$

Ist umgekehrt ein $x \in \bigcup_{i=1}^{n}(\ldots)$ gegeben, kann x laut (1) nicht in A liegen.

5) Zunächst 2 einfache Überlegungen:

Sei $\{A_n\} = \{A_{2k}\} \cup \{A_{2k-1}\} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Dann gilt: ① $\liminf A_n = \liminf A_{2k-1} \cap \liminf A_{2k}$

② $\limsup A_n = \limsup A_{2k-1} \cup \limsup A_{2k}$

Beweis.:

① $\liminf A_n = \bigcup_{n_0 \geq 0} \bigcap_{n \geq n_0} A_n = \bigcup_{n_0 \geq 0} \Big(\bigcap_{\substack{n \geq n_0 \\ n \text{ unger.}}} A_n \cap \bigcap_{\substack{n \geq n_0 \\ n \text{ ger.}}} A_n \Big)$

$= \Big(\bigcup_{n_0 \geq 0} \bigcap_{k \geq n_0} A_{2k-1} \Big) \cap \Big(\bigcup_{n_0 > 0} \bigcap_{k \geq n_0} A_{2k} \Big)$

$= \liminf A_{2k-1} \cap \liminf A_{2k}$

② analog zu ①

a) $A_n := \begin{cases} [0,1] & n \text{ gerade} \\ [1,2] & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\bigcap_{n \geq k} A_n = \{1\} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \liminf A_n = \{1\}$

$\bigcup_{n \geq k} A_n = [0,2] \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \limsup A_n = [0,2]$

nicht monoton, nicht konvergent

b) $A_n := \begin{cases} A_{2k-1} := [-2 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}] & n = 2k-1 \\ A_{2k} := [-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}] & n = 2k \end{cases}$

$\liminf A_{2k-1} = \bigcup_{k_0 > 0} \bigcap_{k \geq k_0} A_{2k-1} = \bigcup_{k_0 > 0} [-2 + \frac{1}{k_0}, 1 - \frac{1}{k_0}] = (-2, 1)$

$\liminf A_{2k} = \bigcup_{k_0 > 0} \bigcap_{k \geq k_0} A_{2k} = \bigcup_{k_0 > 0} [0,1] = [0,1]$

$\overset{①}{\Rightarrow} \liminf A_n = (-2,1) \cap [0,1] = [0,1)$

~~nicht monoton, nicht konvergent~~

$\limsup A_{2k-1} = \bigcap_{k_0 > 0} \bigcup_{k \geq k_0} A_{2k-1} = \bigcap_{k_0 > 0} (-2,1) = (-2,1)$

$\limsup A_{2k} = \bigcap_{k_0 > 0} \bigcup_{k \geq k_0} A_{2k} = \bigcap_{k_0 > 0} [-\frac{1}{k_0}, 1 + \frac{1}{k_0}] = [0,1]$

$\overset{②}{\Rightarrow} \limsup A_n = (-2,1) \cup [0,1] = (-2,1]$

nicht monoton, nicht konvergent

c) $A_n := \begin{cases} (0, 1-\frac{1}{n}] & n \text{ gerade} \\ (\frac{1}{n}, 1) & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$$\liminf A_n = \Big(\bigcup_{n_0 \geq 0} \bigcap_{\substack{n \geq n_0 \\ n \text{ ger.}}} A_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{n_0 > 0} \bigcap_{\substack{n \geq n_0 \\ n \text{ unger.}}} A_n\Big)$$

$$= \bigcup_{n_0 > 0} (0, 1-\tfrac{1}{n_0}] \cap \bigcup_{n_0 > 0} (\tfrac{1}{n_0}, 1) = (0,1)$$

$$\limsup A_n = \Big(\bigcap_{n_0 > 0} \bigcup_{\substack{n \geq n_0 \\ n \text{ ger.}}} A_n\Big) \cup \Big(\bigcap_{n_0 > 0} \bigcup_{\substack{n \geq n_0 \\ n \text{ unger.}}} A_n\Big)$$

$$= \bigcap_{n_0 > 0} (0,1) \cup \bigcap_{n_0 > 0} (0,1) = (0,1)$$

Konvergent, aber nicht monoton

6) $\Omega = \mathbb{R}^2$, $A_n = \{ v = (v_1, v_2) \mid (v_1 - \frac{(-1)^n}{n})^2 + v_2^2 < 1 \}$

$v \in \liminf A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $v \in A_k \;\; \forall k \geq n$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $(v_1 - \frac{(-1)^k}{k})^2 + v_2^2 < 1 \quad \forall k \geq n$, also auch für $k \to \infty$

$\Rightarrow v_1^2 + v_2^2 < 1$

Umgekehrt gilt $v_1^2 + v_2^2 < 1 \Leftrightarrow (v_1^2 + \varepsilon) + v_2^2 < 1$ für ein passendes $\varepsilon > 0$.

$\varepsilon := \left| -2 \cdot \frac{(-1)^k}{k} \cdot v_1 + \frac{1}{k^2} \right|$ wird hinreichend klein für $k \to \infty$ $\forall v_1 \in \mathbb{R}$ und es gilt daher:

$v_1^2 + v_2^2 < 1 \Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left(v_1^2 - 2\frac{(-1)^k}{k} \cdot v_1 + \frac{1}{k^2}\right) + v_2^2 = \left(v_1 - \frac{(-1)^k}{k}\right)^2 + v_2^2 < 1 \quad \forall k \geq k_0$

Daher: $v \in \liminf A_n \Leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 < 1 \Leftrightarrow v \in \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 < 1\}$.

$v \notin \limsup A_n \Leftrightarrow v \in \liminf A_n^c \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $v \notin A_k \quad \forall k \geq n$

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ mit $(v_1 - \frac{(-1)^k}{k})^2 + v_2^2 \geq 1 \quad \forall k \geq n$, also auch für $k \to \infty$

$\Rightarrow v_1^2 + v_2^2 \geq 1$

Umgekehrt: •) $v_1^2 + v_2^2 > 1$: analog zu oben

•) $v_1^2 + v_2^2 = 1$:

$$\left(v_1 - \frac{(-1)^k}{k}\right)^2 + v_2^2 \geq 1 \Leftrightarrow \underbrace{v_1^2 + v_2^2}_{=1} - 2 v_1 \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{k^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 v_1 (-1)^k + \frac{1}{k} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 v_1 (-1)^k \cdot k \leq 1 \quad (*)$$

d.h. für $v_1 \neq 0$ $\nexists n \in \mathbb{N}$, sodass $(*)$ gilt $\forall k \geq n$!

Daher: $v \notin \limsup A_n \Leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 > 1 \vee v = (0, \pm 1) \Rightarrow \limsup A_n = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 + v_2^2 \leq 1\} \setminus \{(0,1); (0,-1)\}$

7) g) $\underline{ZZ:}$ $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$

$\mathbb{1}_{\liminf A_n}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in \liminf A_n$

$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\omega \in A_n \ \forall n \geq n_0$ bzw. $\mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \ \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \liminf \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$

h) $\underline{ZZ:}$ $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$

$\mathbb{1}_{\limsup A_n}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in \limsup A_n$

$\Leftrightarrow \overset{\forall}{\cancel{\exists}} n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n > n_0$ mit $\omega \in A_n$ bzw. $\mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$

$\Leftrightarrow \limsup \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$