13.5.09

Lin. Algebra UE

VIII, 11.1: 2,6
11.2: 2a, 8
11.3: 1adgh, 2
11.4: 1,4

11.1.2) T... VR d. Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) ZZ: $\iota: T \times T \to \mathbb{R}: (f,g) \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} f^{(i)}(0) \cdot g^{(i)}(0)$ ist pos. def. SKP auf T.

ι SKP $\Leftrightarrow$ ι symm. BLF u. ell. BLF, radikalfrei

$$f \in T = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow f' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow f^{(i)} = \sum_{j=i}^{n} (j!)\, a_j x^{j-i} \Rightarrow \underline{f^{(i)}(0) = i! \cdot a_i}$$

also gilt: $\iota(f,g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (i!)^2 (a_i \cdot b_i)$

- $\max\{\text{grad } f, \text{grad } g\} < \infty \Rightarrow$ endliche Summe $\Rightarrow \iota$ wohldefiniert. (unendl. viele $f^{(i)} = 0$)

- Mult. bzgl. Add. distributiv
- Mult. assoziativ
- Mult. kommutativ

$\Rightarrow$ ι ist <u>symm. BLF</u>

ι pos. def. $\Leftrightarrow \underline{\iota(f,f) > 0} \quad \forall f \in V \setminus \{0\}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in \mathbb{N}} (i!)^2 (a_i)^2 > 0 \Leftrightarrow \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ mit } a_i \neq 0 \;\underline{\Leftrightarrow f \neq 0} \text{ (Nullpolynom)}$$

b) $B_n := (f_0, f_1, \ldots, f_n) = (1, x, \ldots, x^n)$; $U_n := [B_n]$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$

$\iota_n := \iota|(U_n \times U_n)$

<u>ges.:</u> Koordinatenmatrix $\underline{\iota_n(B_n, B_n)}$

$$\sum_{i=0}^{n} (i!)^2 (a_i \cdot b_i) = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot \underline{\mathrm{diag}(1, 1, 4, 36, \ldots, (n!)^2)} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

11.1.6) Über $K = \mathbb{Z}_2$, $n \in \mathbb{N}^\times$, ι ... kanonisches Skalarprodukt auf $K^{n\times 1}$, d.h. $\iota(E,E) = E_n$

a) ZZ: $H = \{x \in K^{n\times 1} \mid x \text{ isotrop}\} \cup \{o\}$ ist Hyperebene. Gleichung von H?

$x \in K^{n\times 1} \setminus \{o\}$ isotrop $\Leftrightarrow x \cdot x = \overline{0}$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \overline{0}$

Hinweis

$\Leftrightarrow \underline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \overline{0}}$ ... Gl. v. H

b) ZZ: $\iota' := \iota|(H\times H)$ ist alternierende BLF.

9.5.8 a) $\Rightarrow \iota|(H\times H)$ ist orthosymm. $\underline{\text{BLF}}$

$\iota(x,x) = x\cdot x = 0 \quad \forall x \in H$ lt. Konstr. $\Rightarrow \iota'$ $\underline{\text{alternierend}}$

c) ZZ: $n \equiv 1 \pmod 2 \Leftrightarrow (H,\iota')$ ist symplektischer VR

ι' ist alt. BLF lt. b), noch zu zeigen: ι' ist radikalfrei $\overset{\text{genau}}{\vee}$ für $n \equiv 1$

ι' radikalfrei $\Leftrightarrow H^{\perp_{\iota'}} = \{o\}$

betrachte zunächst $H^\perp$ (Ortho. bzgl. ι): $H^\perp = \{o, (1,1,\ldots,1)^T\}$

aber $\underline{H^{\perp_{\iota'}} = \{o\}}$, da $(1,1,\ldots,1)^T \notin \overset{\text{genau}}{\vee} H$ für $n \equiv 1$

d) ZZ: $n \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow \exists\ (n-2)$ dim UR $U \subset H$ mit (H,ι'') sympl. VR für $\iota'' := \iota|(U\times U)$

Sei H durch obige Gleichung mit $n \equiv 0$ und $n \geq 2$ festgelegt. $\Rightarrow \dim H = n-1$

Sei U: $\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = \overline{0} \\ x_n = \overline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim U = n-2$

$\Rightarrow U^\perp = \{o, \underset{\notin U}{(1,1,\ldots,1,1)}, (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-1\equiv 1},0) \notin U\}$

$\left.\begin{array}{l} \iota''(x,x) = 0 \quad \forall x \in U \\ U^{\perp_{\iota''}} = \{o\} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{(U,\iota'')\text{ symplektisch}}$

11.2.2) $V = \mathbb{R}^{3\times1}$ $\quad a = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad \iota_1 = \mathrm{diag}(1,1,1)$ $\quad \iota_3 = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$

$\iota_2 = \mathrm{diag}(1,1,-1)$ $\quad \iota_4 = \mathrm{diag}(-1,-1,-1)$

orth. Proj. auf $[a]$:

$$pr: \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}: x \mapsto \frac{a\cdot x}{a\cdot a}\, a = \frac{1}{a\cdot a}\overbrace{(a\cdot x)}^{\in \mathbb{R}^{3\times1}} a = \underbrace{\frac{1}{a\cdot a}\, a\cdot a^T\cdot\iota(E,E)}_{\langle E^*, pr(E)\rangle}\cdot x$$

~~id-pr~~

orth. Proj. auf $a^\perp$

$$q := id_V - pr: \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}: x \mapsto x - \frac{a\cdot x}{a\cdot a}\, a \Rightarrow \langle E^*, id_V - pr(E)\rangle = E_3 - \langle E^*, pr(E)\rangle$$

ι_1 $\quad \langle E^*, pr(E)\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}$ $\qquad \langle E^*, q(E)\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-1&-2\\-1&5&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$

ι_2 $\quad \langle E^*, pr(E)\rangle = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\2&2&-4\end{pmatrix}$ $\qquad \langle E^*, q(E)\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&3&-2\\2&2&-2\end{pmatrix}$

ι_3 $\quad \langle E^*, pr(E)\rangle = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&-1&-2\\2&-2&-4\end{pmatrix}$ $\qquad \langle E^*, q(E)\rangle = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-1&-2\\1&3&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$

ι_4 $\quad \langle E^*, pr(E)\rangle = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&-1&-2\\-1&-1&-2\\-2&-2&-4\end{pmatrix}$ $\qquad \langle E^*, q(E)\rangle = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-1&-2\\-1&5&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$

11.3.1) a) (W,ι) beliebig

ZZ: $a\cdot a + b\cdot b = c\cdot c$ falls $a\perp b$ und $c := a-b$

$$c\cdot c = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - \underbrace{a\cdot b}_{0} - \underbrace{b\cdot a}_{0} + b\cdot b = a\cdot a + b\cdot b$$

d) (W,ι) euklidisch, ZZ: $(a+b)\perp(a-b) \Leftrightarrow \|a\| = \|b\|$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + \underbrace{b\cdot a}_{=a\cdot b} - b\cdot b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a\cdot a = b\cdot b$$

$$\overset{\iota\ \text{pos. def.}}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{a\cdot a} = \sqrt{b\cdot b}$$

$$\Leftrightarrow \quad \|a\| = \|b\|$$

g) (W,ι) unitär, ZZ: $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \not\Rightarrow a\perp b$

$\dim V \geq 2$

$$\|a+b\|^2 = \cancel{\|a\|^2}\,(a+b)\cdot(a+b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \underbrace{b\cdot a + a\cdot b}_{=0}$$

$$b\cdot a + a\cdot b = \overline{a\cdot b} + a\cdot b = 0 \Rightarrow a\perp b \vee a\cdot b \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

b) $(\mathbb{V},\iota)$ euklidisch oder unitär, ZZ: $\|a+b\|^2+\|a-b\|^2 = 2\|a\|^2+2\|b\|^2$

$$(a+b)\cdot(a+b)+(a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a + \cancel{a\cdot b} + \cancel{b\cdot a} + b\cdot b + a\cdot a - \cancel{a\cdot b} - \cancel{b\cdot a} + b\cdot b = 2\|a\|^2+2\|b\|^2$$

11.3.2) $(\mathbb{V},\iota)$ euklidisch oder unitär, $p:\mathbb{V}\to U$ Projektion auf UR U

ZZ: p Orthogonalprojektion $\Leftrightarrow \|p(a)\|\le\|a\| \quad \forall a\in\mathbb{V}$

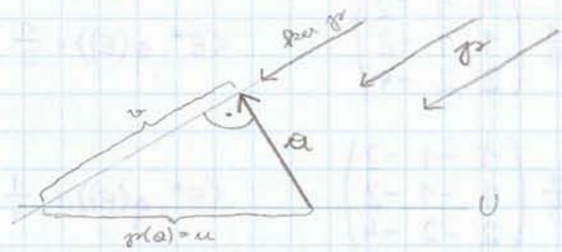
„$\Rightarrow$" $\forall a\in\mathbb{V}$ existiert Zerlegung $a = \underset{\in U}{u} + \underset{\in U^\perp}{v}$

$\Rightarrow p(a)=u$

$$\|a\|^2 = \|(u+v)\|^2 \ge \|u\|^2+\|v\|^2 \ge \|u\|^2 = \|p(a)\|^2$$

also: $\underline{\|a\|\ge\|p(a)\|}$

„$\Leftarrow$" Kontraposition: p ist keine Ortho.-Proj. $\Rightarrow \|p(a)\|>\|a\|$



wähle a derart, dass $a\perp \ker p$

Pythagoras $\Rightarrow \|u\|^2 = \|a\|^2 + \underbrace{\|v\|^2}_{>0}$

$\Rightarrow \|p(a)\|^2 = \|u\|^2 > \|u\|^2 - \|v\|^2 = \|a\|^2$

also: $\underline{\|p(a)\|>\|a\|}$

11.4.1) VR $\mathbb{V}$ über K, Basis $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $\quad \iota:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to K$: $b_i\cdot b_j=\delta_{ij}$

ges.: Basis B von $\mathbb{V}$, zu der keine reziproke Basis C existiert.

Sei $e^* := (1,1,1,\dots)\in\mathbb{V}^*$ und $e^*=b_1^*$.

C reziprok zu B $\Leftrightarrow c_i\cdot b_j=\delta_{ij} \quad \forall (i,j)\in(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

$\Leftrightarrow d_\iota(\underbrace{c_i}_{=:a}) = b_i^* \quad \forall i\in\mathbb{N}$

speziell: $d_\iota(a)=b_1^*$ für ein $a\in\mathbb{V}$

$$\Leftrightarrow d_\iota(a)=d_\iota\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i\Big) \overset{\text{lin.}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \overbrace{d_\iota(b_i)}^{\ne 0^*\ \forall i\in\mathbb{N}} = e^*$$

$\Rightarrow a_i\ne 0 \ \forall i\in\mathbb{N} \Rightarrow a\notin\mathbb{V}$ ↯

(da unendl. viele $a_i\ne0$)

also $\nexists$ reziproker Vektor $c_1\in\mathbb{V}$ zu b_1

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

da gelten muss: $\langle b_i^*, b_i\rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow \langle e^*, b_1\rangle = 1$

$\langle e^*, b_i\rangle=0 \quad \forall i\ne1$

11.4.4) $\mathbb{R}^{6\times 1}$, $\iota(E,E) = \mathrm{diag}(1,1,1,-1,-1,-1)$

a) ges.: $\hat{E}$ (reziproke Basis zu E)

$E=(e_i)$, $\hat{E}=(\hat{e}_i)$ reziprok $\Leftrightarrow \underbrace{e_i\cdot\hat{e}_j}_{=\iota(e_i,\hat{e}_j)} = \delta_{ij} \quad \forall i,j\in\{1,\dots,6\}$

$$\omega(\langle E^*,\hat{E}\rangle^T)\cdot\iota(E,E)\cdot\langle E^*,E\rangle = E_6$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{E}^T\cdot\iota(E,E) = E_6$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{E} = \iota(E,E)}$$

b) H: $x_1+5x_2-2x_3+x_4+3x_6=0$ ges.: $a\in H^\perp$

Satz 11.4.5: Fasse Koeffizienten als kovariante Koordinaten bzgl. E auf („normale" Koo. bzgl. $\hat{E}$)

$$\Rightarrow \hat{a} = E\cdot a = \iota(E,E)\cdot a$$

$$\Leftrightarrow a = (\iota(E,E))^{-1}\cdot\hat{a} = \iota(E,E)\cdot\hat{a}$$

$$\Rightarrow \underline{a} = \begin{pmatrix}1\\5\\-2\\-1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

c) ges.: U_i ($i\in\{1,2,3\}$) ... UR v. $\mathbb{R}^{6\times 1}$, sodass $\iota|(U_1\times U_2)$ pos. def.
$\iota|(U_2\times U_2)$ neg. def.
$\iota|(U_3\times U_3)$ indef., radikalfrei

$$\iota(x,x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-x_5^2-x_6^2$$

$$U_1 = \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\&&\\&0&\\&&\end{pmatrix}\right] \qquad U_2 = \left[\begin{pmatrix}&&\\&0&\\&&\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right] \qquad U_3 = \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$

d) ges.: T_i ($i\in\{1,2,3\}$) $\subset\mathbb{R}^{6\times 1}$ isotrop, sodass $\dim(T_i\cap T_i^\perp)=i$

$$T_1 = \begin{array}{c}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\\ \begin{matrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\end{matrix}\end{array} \qquad T_2 = \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right] \qquad T_3 = \left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$

$A_{11}\perp A_{11}$
$A_{12}\perp A_{12}$
$A_{13}\perp A_{13}$

$A_{21}\not\perp A_{21}$
$A_{22}\perp A_{22}$
$A_{23}\perp A_{23}$

$A_{31}\not\perp A_{31}$
$A_{32}\not\perp A_{32}$
$A_{33}\perp A_{33}$

$\Rightarrow T_1\cap T_1^\perp = T$ ... 3-dim

$\Rightarrow T_2\cap T_2^\perp = [A_{22},A_{23}]$

$\Rightarrow T_3\cap T_3^\perp = [A_{33}]$