1.4.09

Lin. Algebra UE

IV, 9.4: 2, 6a, 7
9.5: 2, 3a
9.6: 2, 4
9.7: 3

9.4.2 a) ZZ: $Sym(V)$ UR v. $Bil(V)$

$\cdot)$ $Sym(V) \neq \emptyset$, da $0 \in Sym(V)$

$\cdot)$ $(x\sigma + \tau)(a,b) = x\sigma(a,b) + \tau(a,b)$
$= x\sigma(b,a) + \tau(b,a)$
$= (x\sigma + \tau)(b,a) \qquad \forall \sigma,\tau \in Sym(V)\ \forall x \in K\ \forall a,b \in V$

ZZ: $Alt(V)$ UR v. $Bil(V)$

$\cdot)$ $Alt(V) \neq \emptyset$, da $0 \in Alt(V)$

$\cdot)$ $(x\sigma+\tau)(a,a) = x\sigma(a,a) + \tau(a,a) = x0 + 0 = 0 \quad \forall\forall\forall$

b) ZZ $Char\, K \neq 2 \Rightarrow Bil(V) = Sym(V) \oplus Alt(V)$

$Char\, K \neq 2 \Rightarrow \sigma$ alternierend $\Leftrightarrow \sigma$ schiefsymmetrisch

Sei $\sigma \in Sym(V) \cap Alt(V) \Rightarrow \sigma(a,b) = \sigma(b,a) = -\sigma(b,a) \Rightarrow \sigma = 0 \quad \forall a,b \in V$

$\Rightarrow$ ~~S(V) ∩ A(~~ $Sym(V) \cap Alt(V) = \{0\}$, also Summe direkt.

Sei $\tau \in Bil(V)$

$\Rightarrow \sigma(a,b) := \dfrac{\tau(a,b) + \tau(b,a)}{2} \in Bil(V)$

$\sigma(a,b) = \sigma(b,a) \Rightarrow \sigma \in Sym(V)$

$\rho(a,b) := \dfrac{\tau(a,b) - \tau(b,a)}{2} \in Bil(V)$

$\rho(a,b) = -\rho(b,a) \Rightarrow \rho \in Alt(V)$

τ beliebig und $\sigma(a,b) + \rho(a,b) = \tau(a,b) \Rightarrow \sigma, \rho$ spannen $Bil(V)$ auf

c) ZZ: $Char\, K \neq 2 \Rightarrow A \in K^{n\times n} = \underset{\text{Sym.}}{B} + \underset{\substack{\text{alt.}\\\text{Schiefsym.}}}{C}$ eindeutig

$\overset{9.4.7}{\Leftrightarrow} \quad \underset{\in Bil(V)}{\tau} = \underset{\in Sym(V)}{\sigma} + \underset{\in Alt(V)}{\rho}$ wobei τ, σ, ρ durch die jew. Matrizen bestimmt sind.

9.4.6) α)

$$\sigma(E,E)=\begin{pmatrix}0&-3&2\\-3&1&1\\2&1&0\end{pmatrix} \qquad K=\mathbb{R},\ \omega=id_{\mathbb{R}}$$

$$\sigma(C,C)=\left(\langle E^*,C\rangle\right)^T\cdot\sigma(E,E)\cdot\langle E^*,C\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-3&2\\-3&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-4&2\\-6&-1&4\\-1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-10&-4\\-10&-8&-3\\-4&-3&1\end{pmatrix}=\sigma(C,C)$$

9.5.2) $\sigma: V\times V\to K$ orthosym.

a) ZZ: $M^{\perp\perp\perp}=M^\perp \quad \forall M\subset V$

•) Satz 9.5.4a $\Rightarrow M\subset M^{\perp\perp} \quad \forall M\subset V$

da auch $M^\perp\subset V$ folgt $M^\perp\subset(M^\perp)^{\perp\perp}=M^{\perp\perp\perp}$

•) Satz 9.5.4b $\Rightarrow M_1\subset M_2\subset V \Rightarrow M_1^\perp\supset M_2^\perp\supset V^\perp$

$M\subset M^{\perp\perp}\Rightarrow M^\perp\supset(M^{\perp\perp})^\perp=M^{\perp\perp\perp}$

b) U UR v. V: $U=U^{\perp\perp}\Leftrightarrow \exists M\subset V$ mit $U=M^\perp$.

„$\Rightarrow$" $U=U^{\perp\perp}\Rightarrow\{o\}\subset U^\perp=:M\neq\emptyset$

$\Rightarrow (U^\perp)^\perp=\underline{M^\perp=U}$ lt. VS.

„$\Leftarrow$" $\exists M\subset V$ mit $U=M^\perp\Rightarrow U^\perp=(M^\perp)^\perp=M^{\perp\perp}$

$\Rightarrow \underline{(U^\perp)^\perp}=(M^{\perp\perp})^\perp\underset{\text{lt. a)}}{=}M^\perp=\underline{U}$ lt. VS

9.5.3α) a) $V^\perp=\ker d_\sigma$

$$\begin{array}{cccc|c}
x_1&x_2&x_3&x_4&\\\hline
-3&0&-1&-3&\\
0&-3&0&-2&0\\
-1&0&-1&-1&\\
-3&-2&-1&-5&\\\hline
0&0&2&0&\\
0&-3&0&-2&0\\
1&0&1&1&\\
0&-2&2&-2&\\\hline
0&0&1&0&\\
0&-6&0&-4&\\
1&0&0&1&0\\
0&-2&0&-2&\\\hline
1&0&0&1&\\
0&1&0&1&0\\
0&0&1&0&\\
0&0&0&2&
\end{array}$$

$\cdot -3$, $\cdot -3$; $\cdot\frac{1}{2}$, $\cdot -1$; $\cdot -3$

$\Rightarrow V^\perp=\{o\}$

b) ges.: Gleichung ~~Basis~~ von $[(1,1,1,1)]^\perp$

$$(1,1,1,1)\begin{pmatrix}-3&0&-1&-3\\0&-3&0&-2\\-1&0&-1&-1\\-3&-2&-1&-5\end{pmatrix}=(-7,-5,-3,-11)$$

$\Rightarrow +7x_1+5x_2+3x_3+11x_4=0$

9.6.2) a) $\sigma: \mathbb{R}^{2\times 1} \times \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$

$q: V \to K: x \mapsto \sigma(x,x)$

$$q: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{(x_1+x_2,\, 3x_1+5x_2)}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

Def.: $\sigma_q: (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$

$$\sigma_q: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 5x_2y_2$$

$$\Rightarrow \sigma_q(E,E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Begründung für $\sigma_q(E,E) = \frac{1}{2}\left(\sigma(E,E) + \sigma(E,E)^T\right)$:

$$\begin{aligned} \sigma_q &= \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma(x+y, x+y) - \sigma(x,x) - \sigma(y,y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cancel{\sigma(x,x)} + \sigma(x,y) + \sigma(y,x) + \cancel{\sigma(y,y)} - \cancel{\sigma(x,x)} - \cancel{\sigma(y,y)}\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_q(E,E) = \frac{1}{2}\left(\sigma(E,E) + \sigma(E,E)^T\right)$$

b)

$$q: \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_2x_3$$

$$\Rightarrow \sigma_q: \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_1 - x_1y_2 - y_1x_2 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2y_2x_3$$

$$\Rightarrow \sigma_q(E,E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_q(B,B) = \langle E^*, B\rangle^T \sigma_q(E,E) \langle E^*, B\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9.6.4)[22] $(b_i)_{i\in I}$ Basis von V, $\beta: \{b_i \mid i\in I\} \cup \{b_j + b_k \mid j,k \in I, j\neq k\} \to K$ beliebig

$\Rightarrow \exists^*$ quadratische Form $V \to K$, welche β fortsetzt.

$\sigma(b_i, b_i) := \beta(b_i) \quad \forall i \in I$
$\sigma(b_i + b_j, b_i + b_j) := \beta(b_i + b_j) \quad \forall i,j \in I,\ i \neq j$

Erweiterung von σ als symm. BLF auf ganz V:

$$\sigma\left(\sum_{i\in I} x_i b_i, \sum_{i\in I} y_i b_i\right) = \sigma(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \ldots, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots)$$
$$= \sigma(x_1 b_1, y_1 b_1) + \sigma(x_1 b_1, y_2 b_2) + \ldots$$
$$= x_1 y_1 \sigma(b_1, b_1) + x_1 y_2 \sigma(b_1, b_2) + \ldots$$

$\exists\, n^2$ Summanden, durch β sind aber nur $\sigma(b_i, b_i)\ \forall i \in I$ bekannt, aber

$$\beta(b_i + b_j) = \sigma(b_i + b_j, b_i + b_j)$$
$$= \sigma(b_i, b_i) + 2\sigma(b_i, b_j) + \sigma(b_j, b_j)$$
$$\Rightarrow \sigma(b_i, b_j) = \frac{1}{2}\left(\beta(b_i + b_j) - \beta(b_i) - \beta(b_j)\right)$$

S.275
$\Rightarrow \sigma(x,y)$ ist durch β auf ganz V eindeutig festgelegt.

9.7.3) a)

$$\begin{aligned}\sigma(a,b) &= (1,1,i,1) \\ \sigma(b,a) &= (0,i,2,1)\end{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 & -i \\ 1-i & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & -1 \\ i & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{aligned}(0,i,2,1)^T &= 2i-1 \\ (1,1,i,1)^T &= 1-2i\end{aligned}$$

b) $h: \mathbb{C}^{4\times 1} \to \mathbb{R}: x \mapsto \sigma(x,x) \quad \omega = {}^-$

$$\begin{aligned} h(a) &= (1,1,-i,1) \\ h(b) &= (0,-i,2,1) \end{aligned} \cdot \sigma(E,E) \cdot \begin{aligned} (1,1,i,1)^T &= 1 \\ (0,i,2,1)^T &= 1 \end{aligned}$$

c)

x_1	x_2	x_3	x_4
0	$1+i$	0	$-i$
$1-i$	0	$1+i$	0
0	$1-i$	0	-1
i	0	-1	1
0	2	0	$-1-i$
1	0	i	1
0	$1-i$	0	-1
-1	0	$-i$	i
0	2	0	$-1-i$
1	0	i	1
0	$2-2i$	0	-2
0	0	0	$1+i$
0	2	0	0
1	0	i	0
0	$2-2i$	0	0
0	0	0	1

+, + , $\cdot(1-i)$, $\cdot i$, $\cdot 2$

$\rightsquigarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	i	0
0	1	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0

$\Rightarrow$ Basis: $\begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Gl.: $ix_1 - x_3 = 0$