Funktionalanalysis UE

VI, 1. $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A} := B(\Omega, \mathbb{C}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty \}$,

$\mathcal{Q}$ σ-Algebra auf Ω, $B(\Omega, \mathcal{Q}) := \{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f\ \mathcal{Q}\text{-messbar} \} \cap \mathcal{A}$.

a) ZZ: $(\mathcal{A}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachalgebra mit Eins.

-) $(\mathcal{A}, \cdot)$ ist Algebra, da punktw. Mult. $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist bilinear, assoz.

-) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum mit $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ ist Banachalgebra

-) $id_\Omega =: I$ ist Einselement mit $\|id_\Omega\|_\infty = 1$.

b) Sei $\phi \in \mathcal{A}$. ges.: $\sigma(\phi)$, $r(\phi)$.

-) Beh.: $\sigma(\phi) = \overline{\operatorname{ran} \phi}$

„$\subseteq$" Sei $\lambda \notin \overline{\operatorname{ran} \phi}$ $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : |\lambda - \phi(x)| \geq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega$.

$g : \Omega \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{1}{\phi(x) - \lambda}$ ist wohldef. und erfüllt $\|g\|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow g \in \mathcal{A}$.

Offenbar gilt $(\phi - \lambda I) \cdot g = g \cdot (\phi - \lambda I) = I$. $\Rightarrow \lambda \in \rho(\phi) = \sigma(\phi)^c$.

„$\supseteq$" Sei $\lambda \in \overline{\operatorname{ran} \phi}$. $\Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ mit $|\phi(x_n) - \lambda| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Ann.: $\phi - \lambda I \notin \sigma(\phi)$ $\Rightarrow \exists g \in \mathcal{A} : g(x)(\phi(x) - \lambda) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.

insbes.: $|g(x_n)| \underbrace{|\phi(x_n) - \lambda|}_{\leq \frac{1}{n}} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |g(x_n)| \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \|g\|_\infty = \infty$ ↯ zu $g \in \mathcal{A}$.

-) $r(\phi) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(\phi) = \overline{\operatorname{ran}\phi}} |\lambda| = \sup\limits_{\lambda \in \operatorname{ran} \phi} |\lambda| = \sup\limits_{x \in \Omega} |\phi(x)| = \|\phi\|_\infty$.

c) ZZ: $B(\Omega, \mathcal{Q})$ abg. Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

lt. Def.: $B(\Omega, \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{A}$.

$(B(\Omega, \mathcal{Q}), \cdot)$ ist auch Algebra, da mit f, g auch $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ mb.

$B(\Omega, \mathcal{Q}) \leq \mathcal{A}$ abg., da für jede konv. Folge mb. Fkt. auch die Grenzfkt. mb. ist.

d) ZZ: $\operatorname{Inv}(B(\Omega,\mathcal{Q})) = \operatorname{Inv}(\mathcal{A}) \cap B(\Omega,\mathcal{Q})$.

Menge der invertierbaren Fkt.

„$\subseteq$" ✓

„$\supseteq$" Sei $f \in B(\Omega,\mathcal{Q})$ und $g \in \mathcal{A}$ sodass $g = f^{-1}$.

ZZ: g mb.

$$g: \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{C} \\ x \mapsto f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \end{array} \quad \text{ist mb. falls } f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Die Bed. ist erfüllt, da $g \in \mathcal{A} \Rightarrow \infty > \|g\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \underbrace{|g(x)|}_{=\frac{1}{f(x)}} = \left(\inf_{x\in\Omega} |f(x)|\right)^{-1}$.

$\Rightarrow f(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in \Omega$.

2. X, Y Banachräume, $S: Y' \to X'$ linear

ZZ: $S: (Y', \sigma(Y',Y)) \to (X', \sigma(X',X))$ stetig $\Leftrightarrow \exists T \in B(X,Y): \; S = T'$.

„$\Leftarrow$"

$$\begin{array}{ccc} (Y', \underbrace{\sigma(Y',Y)}_{\sigma(Y', \iota_Y(Y))}) & \xrightarrow{S} & (X', \overbrace{\sigma(X',X)}^{\sigma(X', \iota_X(X))}) \\ & & \downarrow f \in \iota_X(X) \\ & & (\mathbb{C}, \mathcal{E}) \end{array}$$

S stetig $\Leftrightarrow \iota_X(x) \circ S: (Y', \sigma(Y',Y)) \to \mathbb{C}$ stetig $\forall x \in X$.

Sei $x \in X$, $y' \in Y'$, d.g. $(\iota_X(x) \circ S)(y') = \iota_X(x)(Sy') = (Sy')(x)$

$= y'(Tx) = \iota_Y(Tx)(y')$

$\Rightarrow \iota_X(x) \circ S = \iota_Y(Tx) \in \iota_Y(Y)$, also stetig lt. Def. von $\sigma(Y',Y)$.

„$\Rightarrow$" Falls so ein T existiert, muss es (s.o.) $\iota_X(x) \circ S = \iota_Y(Tx) \quad \forall x \in X$ leisten.

Def. also $T: X \to Y: \; x \mapsto \iota_Y^{-1}(\iota_X(x) \circ S)$.

- wohldef., da $\iota_X(x) \circ S \in \iota_Y(Y)$ und ι_Y injektiv.
- linear als ZS.
- beschränkt?

Betrachte $\overset{M:=}{\{\iota_Y(Tx) : \|x\| \leq 1\}}$ … Familie lin. Gr. $Y' \to \mathbb{C}$.

M punktw. beschr., da $\sup_{\|x\|\leq 1} |\underbrace{\iota_Y(Tx)(y')}_{y'(Tx) = Sy'(x)}| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\underbrace{Sy'}_{\in X'}(x)| = \|Sy'\| < \infty$.

P.o.u.B $\Rightarrow \infty > \sup_{\|x\|\leq 1} \|\iota_Y(Tx)\|_{Y'} \underset{\text{isom.}}{=} \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_Y = \|T\|$.

4. ℓ^p, $p \in (1,\infty)$ $\Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Shift-Operator: $S: \ell^p \to \ell^p$
$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$

•) S linear, isometrisch $\Rightarrow S \in \mathcal{B}(\ell^p)$.

•) $\operatorname{ran} S = \left(\{0\} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}\right) \cap \ell^p$.

•) $(\operatorname{ran} S)^c = \underbrace{\left(\mathbb{C}\setminus\{0\} \times \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}\right)}_{\text{offen in Prod.-Top. } \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}} \cap \ell^p \in \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}\right)\Big|_{\ell^p}$

$\pi_n : \ell^p \to \mathbb{C}$ ist stetig bzgl. $\|\cdot\|_p$
$(x_1, x_2, \dots) \mapsto x_n$

$\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}$ ist gröbste Top., sodass $\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ stetig, also $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}\right)\Big|_{\ell^p} \subseteq \mathcal{T}^{\|\cdot\|_p}$
$\Rightarrow (\operatorname{ran} S)^c \in \mathcal{T}^{\|\cdot\|_p}$, also $\operatorname{ran} S$ abg.

•) $\operatorname{ran} S^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-mal}}, x_1, x_2, \dots)$ $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{ran} S^n = \{0\}$.

•) ZZ: $\sigma_p(S) = \emptyset$.

$\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(S - \lambda I) \neq \{0\}\}$.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. $x \in \ker(S-\lambda I) \Leftrightarrow S(x) - \lambda x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - \lambda x_1 = 0 & \\ x_{n-1} - \lambda x_n = 0 & n \geq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 0$.

Also $\ker(S - \lambda I) = \{0\}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow \sigma_p(S) = \emptyset$.

5. ℓ^p, $p \in (1,\infty)$

Rückwärtsshift-Operator: $R: \ell^p \to \ell^p$
$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$

•) R linear
$\|Rx\|_p^p = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \|x\|_p^p \Rightarrow \|R\| \leq 1$ $\Big\} \Rightarrow R \in \mathcal{B}(\ell^p)$.

•) ZZ: $\sigma_p(R) = \mathbb{D}$.

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. $x \in \ker(R - \lambda I) \Leftrightarrow R(x) - \lambda x = 0$

$\Leftrightarrow x_{n+1} - \lambda x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow x_{n+1} = \lambda^n x_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

-) $|\lambda| \geq 1$: Für $x \neq 0$ gilt $\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda^{n-1} x_1|^p$
$$= |x_1|^p \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|\lambda^p|^n}_{\geq 1} = \infty.$$

$\lightning$ zu $x \in \ell^p \Rightarrow \ker(R - \lambda I) = \{0\}$, also $\lambda \notin \sigma_p(R) \quad \forall \lambda \notin \overline{\mathbb{D}}$.

-) $|\lambda| < 1$: $(\lambda^{n-1} x_1)_{n=1}^{\infty} \in \ker(R - \lambda I) \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(R)$.

•) <u>ZZ:</u> $\sigma(R) = \overline{\mathbb{D}}$.

„$\supseteq$" $\sigma(R) \supseteq \sigma_p(R) = \mathbb{D} \wedge \sigma(R)$ abg. $\Rightarrow \sigma(R) \supseteq \overline{\mathbb{D}}$.

„$\subseteq$" $\sigma(R) \subseteq K_{\|R\|}(0) \underset{\|R\| \leq 1}{\subseteq} \overline{\mathbb{D}}$.

•) <u>ges.:</u> $\sigma(S)$

Wissen aus Bsp. V.8: $R' = \Phi \circ S \circ \Phi^{-1}$ wobei $\Phi: \ell^q \to (\ell^p)'$ isom. Isom.
$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\Rightarrow \sigma(S) = \sigma(\Phi^{-1} \circ R' \circ \Phi) \overset{\circledast}{=} \sigma(R') \underset{\text{Bsp. 3}}{=} \sigma(R) = \overline{\mathbb{D}}.$$

$\circledast$ $\lambda \notin \sigma(\Phi^{-1} \circ R' \circ \Phi) \Leftrightarrow (\Phi^{-1} \circ R' \circ \Phi) - \lambda I_{\ell^q}$ bijektiv

$\Leftrightarrow \Phi^{-1} \circ (R' - \lambda I_{(\ell^p)'}) \circ \Phi$ bijektiv

$\underset{\Phi \text{ Isomorph.}}{\Leftrightarrow} R' - \lambda I_{(\ell^p)'}$ bijektiv $\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(R')$.

6. X Menge, μ σ-endl. Maß, $k \in L^2(\mu \times \mu)$.

$K: L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ mit $Kf(x) := \int_X k(x,t) f(t) \, d\mu(t)$
$\quad f \mapsto Kf$

a) <u>ZZ:</u> $K \in \mathcal{B}(L^2(\mu))$, $\|K\| \leq \|k\|_{L^2(\mu \times \mu)}$

•) K linear, da Integral linear.

•) $$\|Kf\|_2^2 = \int_X |Kf|^2 \, d\mu \leq \int_X \underbrace{\left(\int_X |k(x,t) f(t)| \, d\mu(t)\right)^2}_{\overset{C\text{-}S.}{\leq} \int_X |k(x,t)|^2 d\mu(t) \cdot \|f\|_2^2} d\mu(x)$$

$$\leq \underbrace{\left[\int_X \int_X |k(x,t)|^2 \, d\mu(t) \, d\mu(x)\right]}_{\overset{\text{Fubini, da } k \in L^2(\mu \times \mu)}{=} \int_{X \times X} |k(x,t)|^2 \, d(\mu \times \mu)(x,t) = \|k\|^2_{L^2(\mu \times \mu)}} \|f\|_2^2$$

$\Rightarrow \|Kf\| \leq \|k\|^2$

b) ZZ: K^* hat selbe Bomerk wie K.

$K^*: L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ ist char. durch $(Kf, g) = (f, K^* g)$. $\forall f, g \in L^2(\mu)$.

$$(f, K^* g) = (Kf, g) = \int_X Kf \, \bar{g} \, d\mu$$

$$= \int_X \left[\int_X k(x,t) \, f(t) \, d\mu(t) \right] \bar{g}(x) \, d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_X f(t) \left[\int_X k(x,t) \, \bar{g}(x) \, d\mu(x) \right] d\mu(t)$$

$$= \int_X f(t) \overline{\left[\int_X \overline{k(x,t)} \, g(x) \, d\mu(x) \right]} d\mu(t)$$

$$\Rightarrow (K^* f)(t) = \int_X \overline{k(x,t)} \, f(x) \, d\mu(x).$$

c) ZZ: $a_i, b_i \in L^2(\mu)$; $i = 1, \dots, n$

$k(s,t) := \sum_{i=1}^n a_i(s) \, b_i(t) \quad \Rightarrow \quad \dim \operatorname{ran} K \leq n$.

$$Kf(x) = \int_X \sum_{i=1}^n a_i(x) \, b_i(t) \, f(t) \, d\mu(t)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i(x) \underbrace{\int_X b_i(t) \, f(t) \, d\mu(t)}_{=: \lambda_i(f) \in \mathbb{C}}$$

$\Rightarrow \operatorname{ran} K = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i(f) \, a_i(x) : f \in L^2(\mu) \right\} \subseteq \operatorname{span} \{ a_i : i \in \{1, \dots, n\} \}$.

$\Rightarrow \dim \operatorname{ran} K \leq n$.

7. ZZ: Sei $k \in L^2(\mu\times\mu)$, dann ist der Integraloperator K mit Kern k kompakt, d.h.

für $G: L^2(\mu\times\mu) \to \mathcal{B}(L^2(\mu))$ gilt $\operatorname{ran} G \subseteq \mathcal{K}(L^2(\mu))$
$$k \mapsto K$$

Sei $\{e_i : i \in I\}$ ONB von $L^2(\mu)$ ($\exists$, da Hilbertraum).

Dann ist $\overset{M:=}{\{}\, e_{ij} : (s,t) \mapsto e_i(s)\, e_j(t)\}$ ONB von $L^2(\mu\times\mu)$, denn

•) $$(e_{ij}, e_{kl}) = \int_{X\times X} e_{ij}\, \overline{e_{kl}}\, d(\mu\times\mu) \underset{\uparrow\ \text{Fubini}}{=} \int_X e_i(s)\,\overline{e_k(s)}\, d\mu(s) \cdot \int_X e_j(t)\,\overline{e_l(t)}\, d\mu(t)$$
$$= \delta_{ik}\cdot\delta_{jl} = \delta_{(i,j),(k,l)}. \qquad \Rightarrow M \text{ ist ONS.}$$

•) Angenommen $\exists\, l \in L^2(\mu\times\mu)$ mit $(e_{ij}, l) = 0 \quad \forall i,j \in I$
$$\Rightarrow (e_{ij}, l) = \int_{X\times X} e_i(s)\, e_j(t)\, \overline{l(s,t)}\, d(\mu\times\mu)(s,t)$$
$$= \int_X e_i(s) \underbrace{\left[\int_X e_j(t)\,\overline{l(s,t)}\, d\mu(t)\right]}_{(e_j,\ t\mapsto l(s,t))} d\mu(s)$$
$$= \int_X e_i(s)\, \overline{(t\mapsto l(s,t),\ e_j)}\, d\mu(s)$$
$$= (e_i,\ s \mapsto (t\mapsto l(s,t), e_j)) = 0 \qquad \forall i,j\in I$$

$$(e_i)_{i\in I} \text{ ONB} \Rightarrow s \mapsto (t \mapsto l(s,t), e_j) = 0 \qquad \forall j \in I$$
$$\Leftrightarrow (t\mapsto l(s,t), e_j) = 0 \qquad \forall j\in I,\ s\in X$$
$$(e_j)_{j\in I} \text{ ONB} \Rightarrow t \mapsto l(s,t) = 0 \qquad \forall s \in X$$
$$\Leftrightarrow l(s,t) = 0 \qquad \forall s,t \in X.$$

Bsp. 6 $\Rightarrow$ dim ran $G(k) < \infty \quad \forall k \in \operatorname{span} M$
$$\overset{\text{Prop. 6.4.3}}{\Rightarrow} G(k) \in \mathcal{K}(L^2(\mu)) \quad \forall k \in \operatorname{span} M \Leftrightarrow G(\operatorname{span} M) \subseteq \mathcal{K}(L^2(\mu)).$$

G linear, lt. Bsp. 6: $\|G(k)\| \le \|k\|_{L^2(\mu\times\mu)} \Rightarrow \|G\| \le 1$, also G beschr. und daher stetig.

$$\Rightarrow \operatorname{ran} G = G(L^2(\mu\times\mu)) \overset{M \text{ ONB}}{=} G(\overline{\operatorname{span} M}) \subseteq \overline{G(\operatorname{span} M)} \subseteq \overline{\mathcal{K}(L^2(\mu))} \underset{\uparrow}{=} \mathcal{K}(L^2(\mu))$$

Prop. 6.4.3: $\mathcal{K}(L^2(\mu)) \le \mathcal{B}(L^2(\mu))$ abg.

8. $k \in C[0,1]^2$.

<u>Volterra-Operator:</u> $V : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

$$f \mapsto Vf \quad \text{mit} \quad (Vf)(x) := \int_0^x k(x,t)\, f(t)\, dt. \qquad (x \in [0,1])$$

a) <u>ZZ:</u> $V \in \mathcal{B}(C[0,1])$, $\|V\| \le \|k\|_\infty$

•) V linear, da Integral linear.

•) $|Vf(x)| \le \int_0^x \underbrace{|k(x,t)|}_{\le \|k\|_\infty} \underbrace{|f(t)|}_{\le \|f\|_\infty} dt \le x \|k\|_\infty \|f\|_\infty \le \|k\|_\infty \|f\|_\infty \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow \|Vf\|_\infty \le \|k\|_\infty \|f\|_\infty \Rightarrow \|V\| \le \|k\|_\infty$

•) $Vf \in C[0,1]$?

Sei $x \in [0,1]$ fest, ~~o.B.d.A. $y \ge x$~~, d.g.

$$|Vf(y) - Vf(x)| = \left| \int_0^x (k(y,t) - k(x,t))\, f(t)\, dt + \int_x^y k(y,t)\, f(t)\, dt \right|$$

$$\le \underbrace{\|f\|_\infty \int_0^x |k(y,t) - k(x,t)|\, dt}_{\downarrow\ 0 \text{ für } y \to x \text{ da Int. glm. stetig.}} + \|k\|_\infty \|f\|_\infty \underbrace{|y-x|}_{\downarrow\ 0} \cancel{\le \underbrace{\left| \int_0^x k(y,t)\, f(t)\, dt - \int_0^x k(x,t)\, f(t)\, dt \right|}_{\downarrow\ (\text{Kor. } 8.7.6)\ 0 \text{ für } y \to x, \text{ da Int. stetig}} + \|k\|_\infty \|f\|_\infty \underbrace{|y-x|}_{\downarrow\ 0}}$$

also Vf stetig in x.

b) <u>ZZ:</u> $\|V^n\| \le \|k\|_\infty^n \frac{1}{n!}$ $\quad (\Leftrightarrow \|V^n f\|_\infty \le \|k\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{1}{n!} \quad \forall f \in C[0,1])$

Zeige mittels Induktion $|V^n f(x)| \le \|k\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{x^n}{n!} \quad \forall f \in C[0,1],\ x \in [0,1]$.

($\Rightarrow$ Beh.)

$n=1$: $|Vf(x)| \le \|k\|_\infty \|f\|_\infty$ lt. a)

$n \mapsto n+1$: $\underbrace{|V^{n+1} f(x)|}_{V(V^n f)(x)} \le \int_0^x |k(x,t)|\, |V^n f(t)|\, dt$

$$\overset{IV}{\le} \int_0^x |k(x,t)|\, \|k\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{t^n}{n!}\, dt$$

$$\le \|k\|_\infty^{n+1} \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^x \frac{t^n}{n!}\, dt}_{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

c) <u>ZZ:</u> $\sigma(V) = \{0\}$.

$$\max_{\lambda \in \sigma(V)} |\lambda| = \lim_n \|V^n\|^{\frac{1}{n}} \overset{b)}{\le} \lim_n \left(\|k\|_\infty^n \frac{1}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = \|k\|_\infty \cdot \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

Sei $S \in \mathbb{R}$ bel.

$n! > S^n$ für hinr. große n.

$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \le \sqrt[n]{\frac{1}{S^n}} = \frac{1}{S}$

d) ZZ: V kompakt.

V kompakt $:\Leftrightarrow \overline{V(U_1(0))} \subseteq C[0,1]$ kompakt

$\Leftrightarrow V(U_1(0))$ total beschränkt

Arzelà-Ascoli $\Leftrightarrow$ ·) V punktweise beschränkt

Sei $x \in [0,1]$, d.g.

$$|Vf(x)| \le \|Vf\|_\infty \overset{(*)}{\le} \|k\|_\infty \|f\|_\infty \le \|k\|_\infty \quad \forall f \in U_1(0).$$

·) V gleichgradig stetig

$$|Vf(y) - Vf(x)| \overset{(*)}{\le} \cancel{\left|\int_0^x k(y,t) \underbrace{f(t)}_{<1} dt - \int_0^x k(x,t) \underbrace{f(t)}_{<} dt\right| + \|k\|_\infty \|f\|_\infty |y-x|}$$

$$\le \|f\|_\infty \int_0^x |k(y,t) - k(x,t)| \, dt + \|k\|_\infty \|f\|_\infty |y-x|$$

$$\le \int_0^x |k(y,t) - k(x,t) \, dt| + \|k\|_\infty |y-x| \quad \forall f \in U_1(0).$$

$\leftarrow$ u.a. von f

3) $(C^1, \|\cdot\|)$ wobei $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. ($C^1[0,1]$)

a) ZZ: $(C^1[0,1], \|\cdot\|)$ ist Banachraum.

·) $\|\cdot\|$ ist Norm auf $C^1[0,1]$ ✓

·) $(C^1[0,1], \|\cdot\|)$ ist vollständig.

Analog Bsp. I.3:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF in $C^1[0,1]$ bzgl. $\|\cdot\|$, d.h. sei $\varepsilon > 0$ dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f_m\|_\infty + \|f_n' - f_m'\| < \varepsilon \quad \forall n,m > N.$$

$\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sind CF bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Wissen: $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollst. $\Rightarrow \exists g \in C[0,1]: \lim_n \|f_n' - g\|_\infty = 0$

Sei G Stammfkt. von g ($\exists$, da g stetig u. beschr. auf $[0,1]$), d.g.

$$\big||f_n(x) - f_n(0)| - |G(x) - G(0)|\big| \le |(f_n - G)(0) - (f_n - G)(x)|$$

$$\le \int_0^x |f_n' - g| \, d\lambda \le \|f_n' - g\|_\infty \to 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

also: $\lim_n [f_n(x) - f_n(0)] = G(x) - G(0) \Leftrightarrow \lim_n f_n(x) = G(x) - G(0) + \overbrace{\lim_n f_n(0)}^{\exists, \text{ da } f_n \text{ CF}} =: f$

Lt. Konst. gilt $f \in C^1[0,1]$ sowie $\|f_n - f\| = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{\|f_n' - \underset{= g}{f'}\|_\infty}_{\to 0} \to 0.$

b) ZZ: $\iota: C^1[0,1] \to C[0,1]$ ist linear, kompakt.
$f \mapsto f$

•) ι linear ✓

•) ι kompakt $\Leftrightarrow$ $\iota(U_1^{\|\cdot\|}(0))$ total beschr.

$\overset{\text{A-A}}{\Leftrightarrow}$ •) $\iota(U_1^{\|\cdot\|}(0))$ punktw. beschr.

Sei $x \in [0,1]$, d.g.

$$\sup_{\|f\|\le 1} |\underbrace{\iota(f)}_{f}(x)| \le \sup_{\|f\|\le 1} \|f\|_\infty \le \sup_{\|f\|\le 1} \|f\| \le 1.$$

•) $\iota(U_1^{\|\cdot\|}(0))$ glgr. stetig

$$|\iota(f)(x) - \iota(f)(y)| = |f(x) - f(y)| \overset{\text{MWS}}{\le} \|f'\|_\infty |x-y|$$
$$\le \|f\|_{\infty} |x-y| \le \underset{\text{u.a. von } f!}{|x-y|} \quad \forall f \in U_1^{\|\cdot\|}(0).$$

10. Fouriertransformation: $U: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$
$f \mapsto Uf$ mit $Uf(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} d\lambda(t)$
$(f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))$

a) ges.: $\sigma(U)$.

Def. $M: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$
$f \mapsto Mf$ mit $Mf(x) := f(-x)$

Es gilt $U^2 = M$ sowie $U^4 = M^2 = I$.

Spektralabbildungssatz $\Rightarrow$ $\sigma(U)^4 = \sigma(U^4) = \sigma(I) = \{1\}$.

$\Rightarrow \sigma(U)^2 = \{-1, 1\} \Rightarrow \sigma(U) = \{-1, 1, -i, i\} = \{i^n : n = 0, \ldots, 3\}$.

b) ges.: $\sigma_p(U)$.

$\lambda \in \sigma_p(U) \Leftrightarrow \exists f \in L^2(\mathbb{R}) : (U - \lambda I)(f) = U(f) - \lambda f = 0 \Leftrightarrow U(f) = \lambda f$.

Rechenregeln für FT: •) $U(f')(x) = ix\, U(f)(x)$
•) $U(-ix f(x))(x) = \frac{d}{dx} U(f)(x)$

$$\Rightarrow U((x - \tfrac{d}{dx}) f(x))(x) = U(xf(x))(x) - U(f')(x) = i \frac{d}{dx} U(f)(x) - ix\, U(f)(x)$$
$$= -i (x - \tfrac{d}{dx}) U(f)(x) \qquad (*)$$

Wissen aus ANA3: $U(f_0)(x) = f_0(x)$ für $f_0(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$

Gemeinsam mit $(*)$ folgt $f_n(x) := (x - \frac{d}{dx})^n f_0(x)$ ist Eigenfkt. zu $(-i)^n$, also $\sigma_p(U) = \sigma(U)$.