Funktionalanalysis UE

V) 1. $p \in (1,\infty)$, $X := \ell^p(\mathbb{N})$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{C}$ sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ konvergent in $\mathbb{C}$ $\quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$.

ZZ: $A := (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$ wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Bsp. 2.2.1: $\Phi: \ell^q(\mathbb{N}) \to X'$

$$(\Phi B)(\underset{\substack{\cap \\ X}}{x}) := \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x_n \quad \text{ist isom. Isomorphismus.}$$

Def. $A_N := (a_1, \dots, a_N, 0, \dots) \in \ell^q(\mathbb{N})$

$$\Rightarrow (\Phi A_N)(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$$

$$\Rightarrow \sup_{N\in\mathbb{N}} \|(\Phi A_N)(x)\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \underbrace{\left|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\right|}_{\text{beschr., da Reihe konv.}} < \infty$$

P.o.u.B (Kor. 4.2.2) $\Rightarrow \infty > \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\Phi A_N\|_{X'} \underset{\Phi \text{ isom.}}{=} \sup_{N\in\mathbb{N}} \|A_N\|_{\ell^q} = \|A\|_{\ell^q}$, d.h. $A \in \ell^q(\mathbb{N})$.

2. (X_i, τ_i) top. VR ; $\quad X := \prod_{i\in I} X_i$, $\quad \tau := \prod_{i\in I} \tau_i$

$\pi_i : X \to X_i$

ZZ: $(X,\tau)' = \left\{ \sum_{j=1}^{m} f_{i_j} \circ \pi_{i_j} : m\in\mathbb{N};\ i_1,\dots,i_m \in I;\ f_{i_j} \in (X_{i_j}, \tau_{i_j})' \right\}$

Sei $f \in X'$. $\Rightarrow U := f^{-1}(U_1^{\mathbb{C}}(0)) \in \mathcal{U}^X(0)$.

τ ist init. Topologie bzgl. $(\pi_i)_{i\in I}$ $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}^X(0)$ der Gestalt

$V = \bigcap_{j=1}^{m} \pi_{i_j}^{-1}(W_{i_j})$ mit $m\in\mathbb{N}$; $j_1,\dots,j_m \in I$; $W_{i_j} \in \mathcal{U}^{X_{i_j}}(0)$ und $V \subseteq U$.

Def.: $f_i := f \circ \iota_i$ wobei $\iota_i : X_i \to X$

$$y \mapsto (x_j)_{j\in I} \text{ mit } \begin{cases} x_i = y \\ x_j = 0 & i \neq j. \end{cases}$$

$\underset{X_i \to \mathbb{C}}{f_i}$ ist als ZS stetiges lineares Funktional, also $f_i \in X_i'$.

Sei $i \notin \{i_1,\dots,i_m\}$, $x_i \in X_i$.

$\Rightarrow \pi_{i_j}(\iota_i(x_i)) = \{0\} \subseteq W_{i_j} \quad \Rightarrow \iota_i(x_i) \in V$

$\Rightarrow f_i(X_i) = f \circ \iota_i(X_i) \subseteq f(V) \subseteq f(U) \subseteq U_1^{\mathbb{C}}(0)$.

aber f_i linear $\Rightarrow f_i \equiv 0 \quad \forall i \in I \setminus \{i_1,\dots,i_m\}$

d.h. $f_i(X_i) = f(\iota_i(X_i)) = 0 \Rightarrow \iota_i(X_i) \subseteq \ker f \quad \forall i \in I\setminus\{i_1,\dots,i_m\}$

Def. $Y := \{(x_i)_{i\in I} : x_i = 0$ für fast alle $i \in I\}$

Wegen $x_i = 0 \Leftrightarrow \pi_i(x) = 0$ ist Y dicht in X, es genügt also

<u>ZZ:</u> $f|_Y = \sum_{j=1}^{m} f_{i_j} \circ \pi_{i_j}|_Y$.

Sei $y \in Y$. $\Rightarrow y = \sum_{i\in I} \iota_i(\pi_i(y))$ — endl. Summe!

$$f \text{ linear } \Rightarrow f(y) = \underbrace{\sum_{i\in I} f(\iota_i(\pi_i(y)))}_{\text{endl. Summe, da } f(0)=0} \underset{\text{da } \iota_i(X_i) \subseteq \ker f \text{ für } i \notin \{i_1,\dots,i_m\}}{=} \sum_{j=1}^{m} f(\iota_{i_j}(\pi_{i_j}(y))) = \sum_{j=1}^{m} f_{i_j} \circ \pi_{i_j}(y).$$

3. $(X, \|\cdot\|)$ nicht vollständig, $(\hat{X}, \|\cdot\|)$ Vervollständigung, $X \subseteq \hat{X}$.

a) <u>ZZ:</u> $\phi : (\hat{X})' \to X'$, $f \mapsto f|_X$ ist isom. Isomorphismus.

analog Bew. Kor. 2.4.4.:

-) ϕ linear ✓

-) ϕ injektiv: $f|_X = g|_X \Rightarrow f = g$ da $X \subseteq \hat{X}$ dicht.

-) ϕ surjektiv: Sei $g \in X'$. ZZ: $\exists f \in \hat{X}' = B(\hat{X}, \mathbb{C})$. $f|_X = g$

Wegen $X \subseteq X'$ dicht folgt das aus Satz 2.4.2.

-) ϕ isom.: $\|f\| = \|f|_X\|$ ebenfalls laut Satz 2.4.2.

b) <u>ZZ:</u> $\sigma(\hat{X}', X) \subsetneq \sigma(\hat{X}', \hat{X})$.

„$\subseteq$" $X \subseteq \hat{X} \Rightarrow \iota(X) \subseteq \iota(\hat{X}) \Rightarrow \sigma(\hat{X}', \iota(X)) \subseteq \sigma(\hat{X}', \iota(\hat{X}))$, da li. Seite init. Topologie bzgl. kleinerer Menge von Abb.

„$\neq$" Ann.: $\sigma(\hat{X}', X) = \sigma(\hat{X}', \hat{X}) \Leftrightarrow \iota(X) = \iota(\hat{X}) \underset{\iota \text{ injektiv}}{\Leftrightarrow} X = \hat{X}$ ↯ zu X nicht vollst. $\hat{X}$ vollst.

<u>Bew.:</u> ι isometrisch ($\Rightarrow$ injektiv)

$$\|\iota(x)\|_{\hat{X}''} = \sup_{\substack{f\in X' \\ \|f\|=1}} \|\iota(x)(f)\| = \sup_{\substack{f\in X' \\ \|f\|=1}} |f(x)| \underset{\text{Kor. 5.2.6.}}{=} \|x\|_{\hat{X}}$$

c) <u>ZZ:</u> $(B, \sigma((\hat{X})', X)|_B) = (B, \sigma((\hat{X})', \hat{X})|_B)$ wobei $B \subseteq \hat{X}'$ abg. EHK.

$id: \underbrace{(B, \sigma(\hat{X}', \hat{X})|_B)}_{\text{kompakt lt. Banach-Alaoglu}} \to \underbrace{(B, \sigma(\hat{X}', X)|_B)}_{T_2 \text{ als Einschränkung eines Top. VR}}$ ist bijektiv und wg. $\sigma(\hat{X}', X)|_B \subseteq \sigma(\hat{X}', \hat{X}|_B)$ stetig.

$\Downarrow$ Ana 3 Satz 12.7.3

id ist Homöomorphismus $\Rightarrow$ Beh.

4. $(X, \|\cdot\|)$ norm. Raum

<u>ZZ:</u> $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt bezgl. $\|\cdot\|$.

$$x_n \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x) \quad \forall f \in X'$$

$$\Rightarrow \{ f(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{C} \text{ beschr. } \forall f \in X'$$

$$\{ \underbrace{\iota(x_n)}_{\in X''}(f) : n \in \mathbb{N} \}$$

X' ist BR, da X normiert
$\{\iota(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ punktw. beschr.
$\Big\}\overset{\text{P.u.B.}}{\Rightarrow}$ $\{\iota(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ glm. beschränkt, d.h.

$$\infty > \sup_n \|\iota(x_n)\|_{X''} \underset{\iota \text{ isom.}}{=} \sup_n \|x_n\|_X .$$

5. $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum

<u>ZZ:</u> X ist isom. isomorph zu $M \subseteq C(K)$ abg., wobei K kompakt und T_2.

$\iota : X \to X''$ ist linear, isometrisch ($\Rightarrow$ injektiv)

$\Rightarrow \iota : X \to \iota(X)$ ist isometrischer Isomorphismus.

ι Homöomorphismus $\Rightarrow$ $\iota(X)$ vollst., da X vollst.
$\iota(X) \subseteq X''$, X'' BR mit $\|\cdot\|_{X''}$
$\Big\} \Rightarrow \iota(X) \subseteq X''$ abg.

noch <u>ZZ:</u> $\exists K$ kompakt, T_2 mit $X'' \subseteq C(K)$.

Def.: $K := \{ f \in X' : \|f\| \leq 1\} \subseteq X'$.

Banach-Alaoglu $\Rightarrow$ K kompakt in $(X', \sigma(X', X))$, dieser Raum als top. VR T_2

$\Rightarrow (K, \sigma(X', X)|_K)$ ist kompakter T_2-Raum.

Sei $\phi \in X''$, d.h.

$$\infty > \|\phi\|_{X''} = \sup_{\substack{f \in X' \\ \|f\| \leq 1}} |\phi(f)| = \sup_{f \in K} |\phi(f)| = \|\phi\|_\infty$$

also $X'' \subseteq C(K)$; $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ BR, $(X'', \|\cdot\|_{X''})$ vollst., $\|\cdot\|_\infty|_{X''} = \|\cdot\|_{X''}$ $\Big\} \Rightarrow X'' \subseteq C(K)$ abg.

$\Rightarrow \iota(X) \subseteq C(K)$ abg.

6. $(X, \|\cdot\|)$ reflexiv $:\Leftrightarrow$ $\iota(X) = X''$.

a) ZZ: $(X, \|\cdot\|)$ reflexiv $\Rightarrow$ $(X, \|\cdot\|)$ vollständig.

X reflexiv $\Rightarrow$ $\iota: X \to X''$ ist isom. Isomorphismus (da auch surjektiv)
$\Downarrow$ stetig

$X'' = B(X', \mathbb{C})$ ist BR (da X' normiert) $\Rightarrow$ $X = \iota^{-1}(X'')$ ist vollständig.

b) ZZ: Es sind äquivalent:

(i) X reflexiv

(ii) $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \subseteq X$ ist kompakt bzgl. $\sigma(X, X')$.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

$$\iota(B) \underset{\iota \text{ inj.}}{=} \{y \in \iota(X) : \|\iota^{-1}(y)\| \leq 1\} \underset{X \text{ refl.},\ \iota \text{ isom.}}{=} \{y \in X'' : \|y\|_{X''} \leq 1\} = K_1^{X''}(0).$$

Banach-Alaoglu $\Rightarrow$ $\iota(B)$ kompakt bzgl. $\sigma(X'', \iota'(X'))$ wobei $\iota': X' \to X'''$

Betrachte $\iota: (X, \sigma(X, \underset{\iota(x)}{X'})) \to (X'', \sigma(X'', \iota'(X')))$.

Zeige ι^{-1} stetig, denn d.g. $B = \iota^{-1}(\iota(B))$ ist kompakt bzgl. $\sigma(X, X')$.

$$\begin{array}{ccc} (X'', \sigma(X'', \iota'(X'))) & \xrightarrow{\iota^{-1}} & (X, \sigma(X, X')) \\ & & \big\downarrow y' \in X' \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Da $\sigma(X, X')$ init. Top. bzgl. $\{f : f \in X'\}$ gilt ι^{-1} stetig $\Leftrightarrow$ $y' \circ \iota^{-1}: X'' \to \mathbb{C}$ stetig $\forall y' \in X'$.

Sei $x'' \in X''$ und $x \in X$ sodass $\iota(x) = x''$.

$\Rightarrow$ $y' \circ \iota^{-1}(x'') = y' \circ \iota^{-1}(\iota(x)) = y'(x)$ stetig $\forall y' \in X'$, also ι^{-1} stetig.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Zeige zunächst, dass auch ι stetig ist.

$$\begin{array}{ccc} (X, \sigma(X, X')) & \xrightarrow{\iota} & (X'', \sigma(X'', \iota'(X'))) \\ & & \big\downarrow y'' \in \iota'(X') \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

ι stetig $\Leftrightarrow$ $\overbrace{\iota'(y')}^{\in X''} \circ \iota: X \to \mathbb{C}$ stetig $\forall y' \in X'$.

Sei $x \in X$. $\Rightarrow$ $(\iota'(y') \circ \iota)(x) = \iota'(y')(\iota(x)) = \underbrace{\iota(x)}_{\hat{=}\, x''}(y') = y'(x)$ stetig $\forall y' \in X'$ wg. $\sigma(X, X')$ auf X.

$\Rightarrow \iota(B) \in (X'', \sigma(X'', \iota'(X')))$ kompakt $\Rightarrow$ abg., da T_2.

$\Rightarrow \iota(B) = \overline{\iota(B)}^{\sigma(X'', \iota'(X'))} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Prop. 5.4.2}}}{=} K_1^{X''}(0)$

also $\left.\begin{array}{l} \iota(K_1^X(0)) = K_1^{X''}(0) \\ \iota \text{ linear} \end{array}\right\} \Rightarrow \iota(X) = X''$, denn sei $x'' \in X''$, d.g. $\frac{x''}{\|x''\|} \in K_1^{X''}(0)$

$\Rightarrow \exists x \in K_1^X(0): \iota(x) = \frac{x''}{\|x''\|}$

$\Rightarrow x'' = \|x''\| \, \iota(x) = \iota(\|x''\| \cdot x)$, also $x'' \in \iota(X)$.

7. $(H, (\cdot,\cdot))$ Hilbertraum $\Rightarrow (H, \|\cdot\|)$ ist BR mit $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot,\cdot)}$

a) ZZ: H ist reflexiv.

Prop. 3.2.6: $\Phi: H \to H'$, $y \mapsto f_y$ mit $f_y(x) := (x, y)$ ist isom., konj.-lineare Bijektion.

Betrachte $\Psi := \Phi^{-1}: H' \to H$, $f \mapsto \Psi f$ wobei $f(x) \underset{①}{=} (x, \Psi f) \quad \forall x \in H$.

Zeige $(f, g)_{H'} := (\Psi g, \Psi f)$ ist SKP auf H'.

- $(f, f)_{H'} = (\Psi f, \Psi f) > 0$ für $\Psi f \neq 0 \Leftrightarrow f \neq 0$, da Ψ isom.
- $(f, g)_{H'} = (\Psi g, \Psi f) = \overline{(\Psi f, \Psi g)} = \overline{(g, f)_{H'}}$
- $(f + g, h)_{H'} = (f, h)_{H'} + (g, h)_{H'}$
- $(\alpha f, g)_{H'} = (\Psi g, \underbrace{\Psi \alpha f}_{\bar{\alpha} \Psi f}) = \alpha (\Psi g, \Psi f) = \alpha (f, g)_{H'} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Sei $\|\cdot\|_{H'}$ die Operatornorm auf H', d.g.

$\|f\|_{H'}^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \Psi \text{ isom.}}}{=} \|\Psi f\|^2 = (\Psi f, \Psi f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def.}}}{=} (f, f)_{H'}$

Also $(\cdot,\cdot)_{H'}$ induziert $\|\cdot\|_{H'} \Rightarrow (H', (\cdot,\cdot)_{H'})$ ist HR.

Analog zu oben $\exists$ eine isom. konj.-lin. Bij. $\Psi': H'' \to H'$, $f' \mapsto \Psi' f'$ mit $f'(x') \underset{②}{=} (x', \Psi' f')_{H'} \; \forall x' \in H'$

Sei $f' \in H''$. ZZ: $\exists x \in H: f' = \iota(x)$ d.h. $f'(x') = \iota(x)(x') = x'(x) \quad \forall x' \in H'$.

Es gilt: $f'(x') \underset{\substack{\uparrow \\ ②}}{=} (x', \Psi' f')_{H'} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } (\cdot,\cdot)_{H'}}}{=} (\Psi \Psi' f', \Psi x') \underset{\substack{\uparrow \\ ①}}{=} x'(\underbrace{\Psi \Psi' f'}_{\in H}) \quad \forall x' \in H'$

Also $\iota: X \to X''$ surjektiv, d.h. H reflexiv.

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in H. <u>ZZ:</u> $x_n \xrightarrow{w} x \iff (x_n, y) \to (x, y) \quad \forall y \in H$.

$$x_n \xrightarrow{w} x \iff \underset{\substack{\shortparallel \\ (x_n,\, \Psi f)}}{f(x_n)} \to \underset{\substack{\shortparallel \\ (x,\, \Psi f)}}{f(x)} \quad \forall f \in H' \text{ da } \sigma(H,H') \text{ ind. Top. bzgl. } f\in H'.$$

$$\underset{\Psi \text{ bij.}}{\iff} (x_n, y) \to (x, y) \quad \forall y \in H.$$

c) $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Finde Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \xrightarrow{w} 0$ und $\|x_n\| = 1$.

Def.: $x_n := (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}} \quad \Rightarrow \|x_n\| = 1$.

Sei $y \in H$, d.h. $\|y\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} |y_i|^2 < \infty \quad \Rightarrow \lim_{i\in\mathbb{N}} y_i = 0$.

$\Rightarrow (x_n, y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{in} \overline{y_i} = \overline{y_n} \to 0 = (0, y) \quad \forall y \in H$

$\overset{b)}{\Rightarrow} x_n \xrightarrow{w} 0$.

8. $p \in (1,\infty)$, $X := \ell^p(\mathbb{N})$

$$T: X \to X$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

a) <u>ZZ:</u> $T \in \mathcal{B}(X)$

- T linear ✓
- $\|Tx\| = \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| \le \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \|x\| \quad \Rightarrow \|T\| \le 1$.

b) ges.: $T' \in \mathcal{B}(X')$.

Def. den isom. Isomorphismus $\Phi: \ell^q \to (\ell^p)'$ durch $(\Phi y)(x) := \sum_n y_n x_n \quad \forall x \in \ell^p$.

$$\begin{array}{ccc} \ell^q & \xrightarrow{\tilde{T}} & \ell^q \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ X' & \xrightarrow{T'} & X' \end{array}$$

Diagramm kommutiert, also $\Phi \circ \tilde{T} = T' \circ \Phi$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underset{\substack{\hat{} \\ \ell^q}}{\underbrace{(\tilde{T}y)_n}} x_n = [\Phi(\tilde{T}y)](x) = [\underbrace{(\Phi \circ \tilde{T})}_{T'\circ\Phi}(y)](x) = \cancel{\text{[illegible]}} \langle x, (T'\circ\Phi)(y)\rangle$$

$$= \langle Tx, \Phi y\rangle = (\Phi y)(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n (Tx)_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_{n+1}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} x_n$$

muss von konj. Abb. erfüllt werden

$$\Rightarrow (\tilde{T}y)_n = \begin{cases} 0 & n=1 \\ y_{n-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \tilde{T}: \ell^q \to \ell^q, \quad T' = \Phi \circ \tilde{T} \circ \Phi^{-1}.$$
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$