Funktionalanalysis UE

IV) 1. (X, τ) top. Raum, $E \subseteq X$.

ZZ: E nirgends dicht, d.h. $\mathring{\overline{E}} = \emptyset \Leftrightarrow \forall O \in \tau \setminus \{\emptyset\} \ \exists U_0 \in \tau \setminus \{\emptyset\}: U_0 \subseteq O \wedge U_0 \cap E = \emptyset$.

„$\Rightarrow$" $\mathring{\overline{E}} = \emptyset \Leftrightarrow \nexists O \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ mit $O \subseteq \overline{E}$

$$\Leftrightarrow \forall O \in \tau \setminus \{\emptyset\}: \underbrace{O \cap \overline{E}^c}_{\substack{\shortparallel \\ U_0 \in \tau}} \neq \emptyset$$

Es gilt offenbar $U_0 \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ sowie $U_0 \cap E = (O \cap \underbrace{\overline{E}^c) \cap E}_{\substack{\shortparallel \\ \emptyset}} = \emptyset$.

„$\Leftarrow$" $\mathring{\overline{E}} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists O \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ mit $O \subseteq \overline{E}$.

Sei $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, $U \subseteq O$. ~~Für $x \in U$ bel. gilt dann~~

Wegen $x \in \overline{E}$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ $\forall x \in U$ gilt dann $U \cap E \neq \emptyset$.

Also: $\exists O \in \tau \setminus \{\emptyset\}: U \cap E \neq \emptyset \quad \forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ mit $U \subseteq O$. ($\hat{=}$ Negation der re. Seite)

2. $\mathcal{C} := C([0,1], \mathbb{R})$, betrachte $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$

$X_n := \{ f \in \mathcal{C} : \exists t \in [0,1]: |f(s) - f(t)| \leq n|s-t| \quad \forall s \in [0,1] \}$.

a) ZZ: X_n ist nirgends dicht in $\mathcal{C}$.

(i) ZZ: Die Menge $P[0,1]$ aller Polygonzüge liegt dicht in $\mathcal{C}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Sei $f \in \mathcal{C}$. Für eine bel. Partition P_n: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$

definiere den Polygonzug $h(f, P_n)$ stückweise durch

$$h(f, P_n)(x) := f(t_i) \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_i} + f(t_{i+1}) \frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad x \in [t_i, t_{i+1}].$$

Sei $\varepsilon > 0$, zeige $\exists$ Partition P_m mit $\| f - h(f, P_m) \|_\infty < \varepsilon$.

$f \in \mathcal{C}$, d.h. $\forall x \in [0,1] \ \exists \delta > 0: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \cancel{\varepsilon}\ \frac{\varepsilon}{2}$.

Wähle P_m sodass $\max\limits_{0 \leq i \leq m-1} |t_{i+1} - t_i| < \delta$. ~~Sei~~

Sei $x \in [t_i, t_{i+1}]$, dann gilt

$$|f(x) - h(f, P_m)(x)| = \left| f(x) - f(t_i) \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+1} - t_i} - f(t_{i+1}) \underbrace{\frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i}}_{\frac{(x - t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i)}{t_{i+1} - t_i}} \right|$$

$$= \left| f(x) - f(t_{i+1}) - \frac{t_{i+1}-x}{t_{i+1}-t_i}\left(f(t_i) - f(t_{i+1})\right)\right|$$

$$\leq \underbrace{\left|f(x) - f(t_{i+1})\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left|\frac{t_{i+1}-x}{t_{i+1}-t_i}\right|}_{\leq 1} \underbrace{\left|f(t_i) - f(t_{i+1})\right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \| f - h(f, P_m)\|_\infty \leq \max_{0 \leq i \leq m-1} \left(\max_{x \in [t_i, t_{i+1}]} \left| f(x) - h(f, P_m)(x)\right| \right) < \varepsilon.$$

(ii) ZZ: X_n abg., d.h. $X_n = \overline{X_n}$.

Sei $f \in \overline{X_n}$. $\Rightarrow \exists$ Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $f_k \in X_n$: $\lim_k \| f_k - f\|_\infty = 0$.

$f_k \in X_n \Rightarrow \exists t_k \in [0,1]: |f_k(s) - f_k(t_k)| \leq n|s - t_k| \quad \forall s \in [0,1]$.

Weiters gilt $\{t_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,1]$. Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $(t_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{l \in \mathbb{N}} t_{k_l} = t \in [0,1]$.

$$\Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq |f(s) - f_{k_l}(s)| + |f_{k_l}(s) - f_{k_l}(t_{k_l})| + |f_{k_l}(t_{k_l}) - f(t_{k_l})| + |f(t_{k_l}) - f(t)|$$

$$\leq \underbrace{\|f - f_{k_l}\|_\infty}_{\to 0, \text{ da TF}} + n|s - \underbrace{t_{k_l}}_{\to t}| + \underbrace{\|f_{k_l} - f\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{|f(t_{k_l}) - f(t)|}_{\to 0, \text{ da } f \text{ stetig}} \quad \forall s \in [0,1]$$

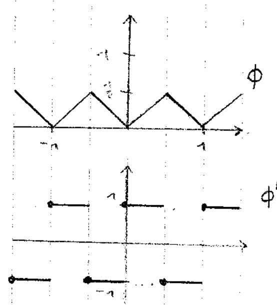
Also: $|f(s) - f(t)| = \lim_l |f(s) - f(t)| \leq n|s-t|$, daher $f \in X_n$.

(iii) ZZ: $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ $\exists h \in \mathcal{C}$ sodass ~~$h \notin X_n$ und $h \in U$.~~ $h \in U$, aber $h \notin X_n$.

($\Rightarrow \nexists O \in \tau\setminus\{\emptyset\}: O \subseteq X_n \Leftrightarrow X_n$ nirgends dicht)

Es genügt, die Beh. auf einer Basis von τ zu zeigen, also auf $\{U_\varepsilon(g) : g \in P[0,1], \varepsilon > 0\}$, da $P[0,1] \subseteq \mathcal{C}$ dicht.

Sei also $g \in P[0,1]$, $\varepsilon > 0$. Definiere M als maximalen Betrag der Steigungen der linearen Funktionen, aus denen g zusammengesetzt ist.



Definiere die Dreiecksfunktion $\phi(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$.

Es gilt $\phi \in C(\mathbb{R})$, $\phi(\mathbb{R}) \in [0, \frac{1}{2}]$.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ sodass $m\varepsilon > n + M$ und def.

$h(x) := g(x) + \varepsilon \phi(mx)$.

Es gilt $h \in \mathcal{C}$ und $\|g - h\|_\infty = \varepsilon \cdot \max_{x \in [0,1]} |\phi(mx)| \leq \varepsilon \|\phi\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$,

aber auch $|h'^+(x)| = |\underbrace{g'^+(x)}_{\in [-M, M]} + \underbrace{\varepsilon m}_{> n+M} \underbrace{\phi'^+(mx)}_{\in \{-1, 1\}}| > n \quad \forall x \in [0,1]$.

Analog gilt für die linksseitigen Abl. $|h'^{-}(x)| > n \quad \forall x \in [0,1]$.

Insbesondere: $\forall t \in [0,1] \ \exists s \in [0,1]: \ \frac{|h(s)-h(t)|}{|s-t|} > n$.

Also ist $h \notin X_n$ und somit X_n nirgends dicht $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) <u>ZZ:</u> $\exists f \in \mathcal{C}$, das nirgends differenzierbar ist.

Satz von Baire $\Rightarrow X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist von 1. Kategorie in $\mathcal{C}$.

X enthält alle Funktionen, die an irgendeiner Stelle in $[0,1]$ beschränkte (einseitige) Differenzenquotienten haben.

Wegen $\mathcal{C}$ vollständig, ist $\mathcal{C}$ von 2. Kategorie und es muss daher stetige Funktionen geben, die nirgends differenzierbar sind (sogar nirgends beschr. einseitige Abl. haben)

3. $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $\mathcal{B}$ alg. Basis von X.

<u>ZZ:</u> $|\mathcal{B}| < \infty \ \vee \ |\mathcal{B}| > \aleph_0$.

-) $\dim X < \infty \Rightarrow |\mathcal{B}| < \infty$.

-) $\dim X = \infty$. Ann.: $|\mathcal{B}| = \aleph_0$, d.h. $\mathcal{B} = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$.

$Y_n := \operatorname{span}\{b_1, .., b_n\}$ ist linearer TR von X; abgeschl., da $\dim Y_n < \infty$.

Angenommen $\mathring{Y}_n \neq \emptyset$: Wähle $x \in \mathring{Y}_n$. $\exists \varepsilon > 0: \ U_\varepsilon(x) \subseteq Y_n$.

$\Rightarrow U_\varepsilon(x) - x = U_\varepsilon(0) \subseteq Y_n$, da Y_n linearer TR.

Da Nullumgebungen absorb. sind, gilt: $\forall x \in X \ \exists t > 0: \ \underbrace{tx \in U_\varepsilon(0) \subseteq Y_n}_{\Downarrow}$

$\Rightarrow X \subseteq Y_n$ ↯ zu $\dim Y_n = n < \dim X = \infty$. $\quad x \in Y_n$, da Y_n linear!

Also muss Y_n nirgends dicht sein $\forall n \in \mathbb{N}$.

Satz von Baire $\Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ ist von 1. Kategorie

X vollständig $\Rightarrow X$ ist von 2. Kategorie ↯ $\Rightarrow |\mathcal{B}| > \aleph_0$.

4. (X,τ) top. VR. $\quad B \subseteq X$ beschränkt $:\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(0)\ \exists \lambda_U > 0: \ B \subseteq \lambda_U U$.

a) <u>ZZ:</u> B beschränkt $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(0)\ \exists \mu_U > 0: \ B \subseteq \lambda U \quad \forall \lambda > \mu_U$.

„$\Leftarrow$" ✓

„$\Rightarrow$" Sei V kreisförmig (d.h. $\lambda V \subseteq V \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1$), d.g.

$\lambda_1 V \subseteq \lambda_2 V$ für $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$.

Bilden Basis von $\mathcal{U}(0)$ in top. VR

Sei $U \in \mathcal{U}(0)$ beliebig, dann $\exists V \in \mathcal{U}(0)$ kreisförmig mit $V \subseteq U$.

B beschr., $V \in \mathcal{U}(0) \Rightarrow \exists \lambda_V > 0: \ B \subseteq \lambda_V V$.

$\Rightarrow B \subseteq \lambda_V V \subseteq \lambda V \subseteq \lambda U \quad \forall \lambda \geq \lambda_V =: \mu_U$.

b) <u>ZZ:</u> B beschränkt $\Leftrightarrow \overline{B}$ beschränkt.

„$\Leftarrow$" ✓

„$\Rightarrow$" Sei $x \in \overline{B}$ und $V \in \mathcal{U}(0)$ symmetrisch mit $B \subseteq V$.

$\Rightarrow \underbrace{(x+V)}_{\in \mathcal{U}(x)} \cap B \neq \emptyset$, da $x \in \overline{B}$.

$\Rightarrow \exists v, v' \in V: \ x + v = v' \overset{V \text{ symm.}}{\Rightarrow} x \in V + V \Rightarrow \overline{B} \subseteq V + V$.

Sei $U \in \mathcal{U}(0)$. Wähle $V \in \mathcal{U}(0)$ symm., sodass $V + V \subseteq U$ (geht lt. Lemma 2.1.7.)

B beschr. $\Rightarrow \exists \lambda > 0: \ B \subseteq \underbrace{\lambda V}_{\text{Symm.}} \quad \Rightarrow \overline{B} \subseteq \lambda V + \lambda V \subseteq \lambda U$.

c) <u>ZZ:</u> K kompakt $\Rightarrow K$ beschränkt.

Sei $U \in \mathcal{U}(0)$, wähle $V \in \mathcal{U}(0)$ offen u. kreisförmig mit $V \subseteq U$.

$\{x + V: \ x \in K\}$ ist offene Überd. von K.

K kompakt $\Rightarrow \exists x_1, .., x_n \in K: \ K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$

V absorbierend, d.h. $\exists t_i > 0: \ t_i x_i \in V$

V kreisförmig $\Rightarrow \lambda x_i \in V \quad \forall \lambda \in [0, t_i]$

Sei $t := \min_{1 \leq i \leq n} t_i > 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, .., n\}: \ \lambda x_i \in V \quad \forall \lambda \in [0, t]$.

$\Rightarrow$ speziell: $t x_i \in V \ \forall i$

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(\frac{V}{t} + V\right) = \left(\frac{1}{t} + 1\right) V \subseteq \left(\frac{1}{t} + 1\right) U$.

d) <u>ZZ:</u> $\tau = \tau_{\|\cdot\|} \Rightarrow \exists$ Basis von $\mathcal{U}(0)$ aus beschränkten Mengen.

Sei $\varepsilon > 0$, $U \in \mathcal{U}(0)$. $\Rightarrow \exists \eta > 0: \ U_\eta(0) \subseteq U$.

5. Notation aus Bsp. II.1: (X_n, τ_{d_n}) top. VR. d_n von Normen $\|\cdot\|_n$ induziert.

$d(f,g) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} \hat{d}_n(f_n,g_n)\right)$ mit $\hat{d}_n(f_n,g_n) := \frac{d_n(f_n,g_n)}{1+d_n(f_n,g_n)}$.

a) ZZ: (X, τ_d) ist lokalkonvexer top. VR.

Wissen aus Bsp. II.1: $\tau_d = \prod_{n\in\mathbb{N}} \tau_{d_n}$.

(X_n, τ_{d_n}) lokalkonvex, die Kugeln bilden konvexe Umgebungsbasen.

τ init. Top. bzgl. Projektionen $\pi_n : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to X_n$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker \pi_n = \{0\}$ da $\pi_n(x) = 0 \ \forall n\in\mathbb{N} \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$

$\Rightarrow (X, \tau_d)$ ist lokalkonvexer VR.

b) ZZ: $\nexists\, U \in \mathcal{U}(0)$ mit U ist beschränkt i.S. v. top. VR.

Sei $U \in \mathcal{U}(0)$. Zeige $\exists\, W \in \mathcal{U}(0) : \nexists\, \lambda > 0 : U \subseteq \lambda W$.

Da τ_d init. Topologie ist eine Basis von $\mathcal{U}(0)$ gegeben durch

$$\mathcal{V}(0) = \left\{ \bigcap_{i=1}^{m} \pi_{n_i}^{-1}(U_{n_i}) : m\in\mathbb{N},\ U_{n_i} \in \mathcal{U}_{n_i}(0) \right\}$$

Wähle $V \in \mathcal{V}(0)$ mit $V \subseteq U$. Lt. Konstruktion $\exists\, N\in\mathbb{N} : \pi_N(V) = X_N$ (wähle $N \in \mathbb{N}\setminus\{n_1,\dots,n_m\}$)

$\Rightarrow \pi_N(U) \supseteq \pi_N(V) = X_N$.

Wähle $x \in X_N \setminus \{0\}$ ($\neq \emptyset$ lt. Angabe).

(X_N, τ_{d_N}) ist top. VR, also T_2 $\Rightarrow \exists\, W_0 \in \mathcal{U}_N(0),\ W_x \in \mathcal{U}_N(x) : W_0 \cap W_x = \emptyset$.

$\Rightarrow W_0 \neq X_N$.

Def. $W := \pi_N^{-1}(W_0) \in \mathcal{U}(0)$.

Ann. $\exists\, \lambda > 0 : U \subseteq \lambda W \Rightarrow X_N = \pi_N(U) \subseteq \pi_N(\lambda W) = \lambda \underbrace{\pi_N(W)}_{W_0} \neq X_N$ $\lightning$

c) $\exists$ Norm auf X, die τ_d induziert?

Nein lt. Bsp. 4d.

6. (X,τ) top. VR

ZZ: τ normierbar (d.h. $\exists$ Norm $\|\cdot\|$ sodass $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$) $\Leftrightarrow$ $\exists W \in \mathcal{U}(0)$ beschr., konvex.

„$\Rightarrow$" Klar, da Kugeln beschränkt und konvex.

„$\Leftarrow$" Sei $W \in \mathcal{U}(0)$ beschr., konvex, o.B.d.A kreisförmig (vgl. Lemma 2.1.7).

Betrachte Minkowski-Funktional $\mu_W(x) := \inf\{t>0 : \frac{1}{t}x \in W\}$.

Kor. 5.1.9 $\Rightarrow$ μ_W ist Seminorm auf X.

ZZ: μ_W ist Norm, d.h. $\mu_W(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Sei $x \in X$ mit $\mu_W(x) = 0 \underset{W\text{ kreisf.}}{\Leftrightarrow} sx \in W \quad \forall s>0$.

Sei $x \neq 0$. $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(0)$ mit $x \notin U$ (da (X,τ) T_1).

W beschränkt $\Rightarrow \exists \lambda > 0 : W \subseteq \lambda U$

$sx \in W \Rightarrow sx \in \lambda U \quad \forall s>0 \Leftrightarrow x \in \frac{\lambda}{s} U \quad \forall s>0$ $\quad$ $\lightning$ zu $x \notin U$.

Also: $\|\cdot\| := \mu_W$ ist Norm auf X.

noch ZZ: $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$ bzw. $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}^{\|\cdot\|}(0)$.

„$\subseteq$" Sei $U \in \mathcal{U}(0)$. $\exists \lambda > 0 : W \subseteq \lambda U$

$$\Rightarrow U_{\frac{1}{\lambda}}(0) = \frac{1}{\lambda} U_1(0) \underset{\uparrow_{5.1.8}}{\subseteq} \frac{1}{\lambda} W \subseteq U \quad \Rightarrow U \in \mathcal{U}^{\|\cdot\|}(0)$$

„$\supseteq$" Sei $U \in \mathcal{U}^{\|\cdot\|}(0)$. Wähle $\varepsilon > 0$ sodass $U_\varepsilon(0) \subseteq U$.

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} W \underset{5.1.8}{\subseteq} \frac{\varepsilon}{2} \overline{U_1(0)} \subseteq \frac{\varepsilon}{2} U_2(0) = U_\varepsilon(0) \subseteq U \quad \Rightarrow U \in \mathcal{U}(0), \text{ da } \frac{\varepsilon}{2} W \in \mathcal{U}(0).$$

7. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endl. Maßraum. $h: \Omega \to \mathbb{C}$ messbar.

$\mathcal{D}_h := \{ f \in L^2 : hf \in L^2 \}$, $\quad M_h : \begin{cases} \mathcal{D}_h \to L^2 \\ f \mapsto hf \end{cases}$

ZZ: Es sind äquivalent:

(i) $h \in L^\infty$

(ii) $\mathcal{D}_h = L^2$ und M_h beschränkt

(iii) $\mathcal{D}_h = L^2$.

(i) ⇒ (ii):

∘) $f \in L^2 \Rightarrow \|M_h f\|_2^2 = \int_\Omega |hf|^2 \, d\mu = \int_\Omega \underbrace{|h|^2}_{\leq \|h\|_\infty^2 \ \mu\text{-fü}} |f|^2 \, d\mu \leq \|h\|_\infty^2 \cdot \|f\|_2^2 < \infty$ da $h \in L^\infty$.

$\Rightarrow M_h f \in L^2 \Rightarrow L^2 \subseteq \mathcal{D}_h$, Umkehrung klar.

∘) $\|M_h f\|_2 \leq \|h\|_\infty \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2 \iff \|M_h\| \leq \|h\|_\infty < \infty$.

(ii) ⇒ (iii) ✓

(iii) ⇒ (ii):

Satz vom abgeschlossenen Graphen:

∘) $\mathcal{D}_h \, (=L^2)$, L^2 Banachräume ✓

∘) M_h linear ✓

∘) $\operatorname{graph} M_h = \{ (f, hf) : f \in \overset{L^2}{\mathcal{D}_h} \} \subseteq L^2 \times L^2$ abg. ?

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in L^2$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f \in L^2 \ \wedge \ hf_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g \in L^2$.

ZZ: $hf = g$ μ-fü.

$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f \Rightarrow \| hf_n \mathbb{1}_{[|h|\leq m]} - hf \mathbb{1}_{[|h|\leq m]} \|_2^2 = \int_\Omega |h \mathbb{1}_{[|h|\leq m]}|^2 |f_n - f|^2 \, d\mu$
$\leq m^2 \|f_n - f\|_2^2 \to 0$.

Lt. VS gilt aber $hf_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$, also auch $hf_n \mathbb{1}_{[|h|\leq m]} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g \mathbb{1}_{[|h|\leq m]}$.

Da der Grenzwert ~~müssen~~ μ-fü eindeutig ist, gilt daher $hf \mathbb{1}_{[|h|\leq m]} = g \mathbb{1}_{[|h|\leq m]}$ μ-fü.

Daraus folgt schon $hf = g$ μ-fü auf Ω, da $\mu[|h| = \infty] = 0$, denn:

μ ist σ-endlich, d.h. $\exists (A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\mu(A_i) < \infty \ \wedge \ \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

$\Rightarrow \mathbb{1}_{A_i} \in L^2 \overset{VS}{\Rightarrow} h \mathbb{1}_{A_i} \in L^2 \Rightarrow \mu[|h \mathbb{1}_{A_i}| = \infty] = \mu([|h| = \infty] \cap A_i) = 0$.

$\Rightarrow \mu[|h| = \infty] = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} ([h=\infty] \cap A_i) \right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu([|h| = \infty] \cap A_i) = 0$.

⇒ M_h stetig, also beschränkt.

(ii) $\Rightarrow$ (i):

$ = \inf\{\alpha > 0 : \mu[|h|>\alpha] = 0\}$

Sei $\varepsilon > 0$, def. $A := [|h| \geq \|h\|_\infty - \varepsilon]$

·) $\mu(A) > 0$, denn sonst wäre $|h| < \|h\|_\infty - \varepsilon$ μ-fü und $\|h\|_\infty$ kann nicht das essentielle Supremum sein.

·) μ ist σ-endlich $\Rightarrow \exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mu(A_n) < \infty \wedge \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Def.: $B_n := A \cap A_n$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(B_N) > 0$.

$$\Rightarrow \|M_h \underbrace{1\!\!1_{B_N}}_{\in L^2}\|_2^2 = \|h 1\!\!1_{B_N}\|_2^2 = \int_{B_N} |h|^2 \, d\mu \geq \int_{B_N} (\|h\|_\infty - \varepsilon)^2 \, d\mu$$
$$\geq (\|h\|_\infty - \varepsilon)^2 \, \|1\!\!1_{B_N}\|_2^2 .$$

$\Rightarrow \|M_h\| \geq \|h\|_\infty - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \Rightarrow \|M_h\| \geq \|h\|_\infty$, d.h. $h \in L^\infty$.

Ann.: $h \notin L^\infty$. $\Rightarrow \mu[|h| > n] > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

μ ist σ-endlich $\Rightarrow \exists (A_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mu(A_i) < \infty \wedge \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle $I \in \mathbb{N}$ sodass $\mu(A_I \cap [|h|>n]) > 0$ und def. $C_n := A_I \cap [|h| > n]$.

$$\Rightarrow \|M_h \underbrace{1\!\!1_{C_n}}_{\in L^2}\|_2^2 = \|h 1\!\!1_{C_n}\|_2^2 = \int_{C_n} |h|^2 \, d\mu > n\, \mu(C_n) = n \, \|1\!\!1_{C_n}\|_2^2$$

$\Rightarrow \|M_h\| > n$, also kann M_h nicht beschränkt sein. ↯

8. <u>ZZ:</u> $(C^\infty(\Omega), \tau_d)$ ist lokalkonvex, d.h. $\exists$ (Null-) Umgebungsbasis aus konvexen Mengen.

$$d(f,g) := \max_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{N} \frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)}, \qquad p_N(f) := \max\{|f^{(k)}(x)| : x\in K_N,\ k<N\}$$

Betrachte $V_{N,\varepsilon} := \{f\in C^\infty(\Omega) : p_N(f) < \varepsilon\}$

Seien $f,g\in V_{N,\varepsilon}$, $t\in[0,1]$:

$$p_N(tf+(1-t)g) = \max_{k<N} \|t f^{(k)} + (1-t)\, g^{(k)}\|_{\infty,K_N}$$

$$\leq \max_{k<N} \left(t\,\|f^{(k)}\|_{\infty,K_N} + (1-t)\,\|g^{(k)}\|_{\infty,K_N}\right)$$

$$\leq t \underbrace{p_N(f)}_{<\varepsilon} + (1-t)\underbrace{p_N(g)}_{<\varepsilon} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $V_{N,\varepsilon}$ ist konvex $\forall N\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0$.

Def. $\mathcal{V} := \{V_{N,\varepsilon} : N\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0\}$.

(i) <u>ZZ:</u> $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}(0)$.

Sei $\varepsilon>0$, $M\in\mathbb{N}$. $p_M(f)<\varepsilon \iff \frac{p_M(f)}{1+p_M(f)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Es gilt $\frac{1}{M}\frac{p_M(f)}{1+p_M(f)} \leq \max_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{N}\frac{p_N(f)}{1+p_N(f)} < \frac{1}{M}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} =: \varepsilon' \iff d(f,0)<\varepsilon'$.

Also $U_{\varepsilon'}(0)\subseteq V_{M,\varepsilon}$ und daher $V_{M,\varepsilon}\in\mathcal{U}(0)$.

(ii) <u>ZZ:</u> $\mathcal{V}$ ist Basis von $\mathcal{U}(0)$.

Wissen: $\{U_\varepsilon(0) : 1>\varepsilon>0\}$ ist Basis von $\mathcal{U}(0)$.

Sei $1>\varepsilon>0$. Wähle $M\in\mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{M}<\varepsilon$.

- $N\leq M$: $\frac{1}{N}\frac{p_N(f)}{1+p_N(f)} \leq \frac{p_N(f)}{1+p_N(f)} < \varepsilon \iff p_N(f) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} =: \varepsilon'$
$\Uparrow$
$p_M(f) < \varepsilon'$
- $N\geq M$: $\frac{1}{N}\frac{p_N(f)}{1+p_N(f)} \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{M} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $V_{M,\varepsilon'}\subseteq U_\varepsilon(0)$.

Somit ist $\mathcal{V}$ Umgebungsbasis von $\mathcal{U}(0)$ aus konvexen Mengen.

9. Sei $0 < p < 1$, $V \subseteq L^p(0,1)$.

a) ZZ: $V \in \mathcal{U}(0)$ konvex $\Rightarrow V = L^p(0,1)$.

Sei $V \in \mathcal{U}(0)$ konvex. Wähle $r > 0$ sodass $U_r(0) = \{g \in L^p(0,1) : \Delta g < r\} \subseteq V$,

wobei $\Delta g := \int_0^1 |g(t)|^p \, dt$.

Sei $f \in L^p(0,1)$, zeige $f \in V$.

Wegen $p-1 < 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$: $n^{p-1} \Delta f < r$.

Für $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ gilt $\Delta f = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{x_i}^{x_{i+1}} f$.

$F: \begin{cases} [0,1] \to [0, \Delta f] \\ x \mapsto \Delta_0^x f \end{cases}$ ist monoton wachsend und stetig (als unbest. Integral wegen abs. stetig)

mit $F(0) = 0$, $F(1) = \Delta f$.

Aufgrund der Surjektivität $\exists$ dann ~~für~~ x_i mit $F(x_i) = \frac{i}{n} \Delta f$ $(i = 0, \dots, n)$.

$\Rightarrow \Delta_{x_i}^{x_{i+1}} f = F(x_{i+1}) - F(x_i) = \frac{1}{n} \Delta f \quad \forall i = 0, \dots, n$.

$\Rightarrow \underbrace{n^p \Delta_{x_i}^{x_{i+1}} f}_{=} = n^{p-1} \Delta f < r$

$\Delta_{x_i}^{x_{i+1}} (nf) = \Delta g_i$ für $g_i := n f \mathbb{1}_{[x_i, x_{i+1}]}$. $\Rightarrow g_i \in U_r(0) \subseteq V \quad \forall i = 0, \dots, n$.

noch ZZ: $f = \frac{1}{n}(g_1 + \dots + g_n) \in V$.

$n = 2$: $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in V$ da V konvex.

$n \mapsto n+1$: $\frac{1}{n+1}(g_1 + \dots + g_n + g_{n+1}) = \frac{1}{n+1}(g_1 + \dots + g_n) + \frac{1}{n+1} g_{n+1}$

$= \frac{n}{n+1} \Big[\underbrace{\frac{1}{n}(g_1 + \dots + g_n)}_{\in V \text{ lt. I-Annahme}} \Big] + \frac{1}{n+1} g_{n+1} \in V$ da $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$.

Also: $V = L^p(0,1)$

b) ZZ: $L^p(0,1)' = \{0\}$

Sei $f: L^p(0,1) \to \mathbb{C}$ stetig, linear.

Sei $U \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(0)$ konvex. $\Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_{L^p}(0)$ konvex.

a) $\Rightarrow f^{-1}(U) = L^p(0,1) \quad \forall \underbrace{U \in \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(0) \text{ konvex}}_{\text{bilden Basis von } \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(0)}$, insb. für alle abg. Kugeln.

$\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{\frac{1}{n}}(0) \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(K_{\frac{1}{n}}(0)) = L^p(0,1)$.

Also $f(g) = 0 \quad \forall g \in L^p(0,1)$ bzw. $f \equiv 0$.