8.4.11

Funktionalanalysis UE

III, 1. a) $H = L^2([-1,1],\lambda)$, $M := \{ f \in H : \exists N \subseteq [-1,1] : \lambda(N) = 0,\ f(x) = f(-x)\ \forall x \in [-1,1] \setminus N \}$

(i) ZZ: M ist abg. Teilraum von H.

- M ist lin. Teilraum, da abg. bzgl. Addition und skalarer Multiplikation
- Sei $f \in \overline{M}$. $\Rightarrow \exists$ Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in M\ \forall n \in \mathbb{N}$: $\lim_n f_n = f$ (bzgl. $\|\cdot\|_2$)

$\Rightarrow \lim_n f_n = f$ punktw. $\overset{\lambda\text{-f.ü.}}{\text{f.TF.}}$ $\exists A \subseteq [-1,1]$, $\lambda(A) = 0$: $\lim_n f_n(x) = f(x)\quad \forall x \in [-1,1] \setminus A$.

$f_n \in M \Rightarrow \exists N_n : f_n(x) = f_n(-x)\quad \forall x \in [-1,1]\setminus N_n$.

Sei $A \cup (-A) \cup \bigcup_n N_n =: R$, d.g.

$\Rightarrow \lambda(R) \leq 2\lambda(A) + \sum_n \lambda(N_n) = 0$

$\Rightarrow f(x) = \lim_n f_n(x) = \lim_n f_n(-x) = f(-x)\quad \forall x \in [-1,1] \setminus R$

Also: $f \in M$. $\Rightarrow M = \overline{M}$.

(ii) ges.: $M^\perp = \{ g \in H : (f,g) = 0\quad \forall f \in M \}$

$0 = (f,g)^2 = \int_{[-1,1]} f\bar{g}\, d\lambda$ falls $f\bar{g}$ ungerade λ-f.ü.

$\Leftrightarrow$ g ungerade λ-f.ü.

$\Rightarrow M^\perp \supseteq E := \{ f \in H : \exists N \subseteq [-1,1], \lambda(N) = 0 : f(x) = -f(-x)\quad \forall x \in [-1,1] \setminus N \}$

Sei $f \in L^2[-1,1]$, d.g. $f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\hat{=} M} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\hat{=} E}\quad \forall x \in [-1,1]$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow H = E + M, \\ E \cap M = \{0\} \leftarrow \text{Restklasse} \end{array}\right\} \Rightarrow H = E \dot{+} M,\ E \perp M \Rightarrow H = E \oplus M,\ E = M^\perp.$$

(iii) ges.: orthogonale Projektion auf M.

$P : L^2[-1,1] \longrightarrow M$ ist Orth.-Proj., da $P \circ P = P$, $\operatorname{rng} M \perp \ker M$.

$f(.) \longmapsto \frac{f(.) + f(-.)}{2}$

b) $(H, (.,.))$ Hilbertraum, $\{x_1, \dots, x_n\}$ ONS

ges.: expl. Darstellung der orth. Proj. auf $E := \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$

$\left.\begin{array}{l} H \text{ top. VR} \\ \dim E = n \end{array}\right\} \Rightarrow E = \overline{E}$. Satz 3.3.3 $\rightsquigarrow P_E(x) = \sum_{i=1}^n (x, x_i)\, x_i\quad \forall x \in H$.

2. $(H,(.,.))$ Hilbertraum, P_1, P_2 orth. Projektionen

a) <u>ZZ:</u> Es sind äquivalent:

(i) $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$

(ii) $\operatorname{ran} P_1 \perp \operatorname{ran} P_2$

(iii) $P_1 + P_2$ ist orth. Projektion

(i) ⇒ (ii): Sei $x \in \operatorname{ran} P_1$. $\Rightarrow x = P_1 x$

$$\Rightarrow P_2 x = \underbrace{P_2 P_1}_{0} x = 0, \text{ d.h. } x \in \ker P_2 = (\operatorname{ran} P_2)^\perp$$

$$\Rightarrow \operatorname{ran} P_1 \subseteq (\operatorname{ran} P_2)^\perp \text{ also } \operatorname{ran} P_1 \perp \operatorname{ran} P_2.$$

(ii) ⇒ (i): $\operatorname{ran} P_1 \subseteq (\operatorname{ran} P_2)^\perp = \ker P_2$

$$\Rightarrow P_2 y = 0 \quad \forall y \in \operatorname{ran} P_1 \quad \Rightarrow P_2 P_1 x = 0 \quad \forall x \in H. \quad \Rightarrow P_2 P_1 = 0$$

analog: $P_1 P_2 = 0$

(i) ⇒ (iii)

•) $(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + \underbrace{P_1 P_2}_{0} + \underbrace{P_2 P_1}_{0} + P_2^2 = P_1 + P_2 \quad \Rightarrow P_1 + P_2$ Projektion.

•) $P_1 + P_2$ ist orthogonal g.d.w. $((P_1+P_2)x, y) = (x, (P_1+P_2)y)$

$$((P_1+P_2)x,y) = (P_1 x, y) + (P_2 x, y) = (x, P_1 y) + (x, P_2 y) = (x, (P_1+P_2)y) \ \checkmark$$

(iii) ⇒ (i)

$$P_1 + P_2 = (P_1+P_2)^2 = \underbrace{P_1^2}_{P_1} + P_1 P_2 + P_2 P_1 + \underbrace{P_2^2}_{P_2} \quad \Leftrightarrow \quad P_1 P_2 = - P_2 P_1$$

$$\Rightarrow P_1 P_2 = P_1 \underline{P_1 P_2} = - \underline{P_1 P_2} P_1 = P_2 P_1 P_1 = P_2 P_1 = - P_1 P_2$$

$$\Rightarrow P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0.$$

b) <u>ges:</u> $\operatorname{ran}(P_1 + P_2)$, $\ker(P_1 + P_2)$

-) $\operatorname{ran}(P_1 + P_2) = \operatorname{ran} P_1 + \operatorname{ran} P_2$

„$\subseteq$" klar

„$\supseteq$" $(P_1 + P_2) P_1 = P_1, \quad (P_1 + P_2) P_2 = P_2$

$\Rightarrow \operatorname{ran} P_i \subseteq \operatorname{ran}(P_1 + P_2)$

$\Rightarrow \underline{\operatorname{ran} P_1 \cup \operatorname{ran} P_2} \subseteq \operatorname{ran}(P_1 + P_2)$

-) $\ker(P_1 + P_2) = \ker P_1 \cap \ker P_2$

$\ker(P_1 + P_2) = (\operatorname{ran}(P_1 + P_2))^\perp$

$= (\operatorname{ran} P_1 \cup \operatorname{ran} P_2)^\perp$

$= (\operatorname{ran} P_1)^\perp \cap (\operatorname{ran} P_2)^\perp$

$= \ker P_1 \cap \ker P_2.$

3. $H = \mathbb{C}_n[z]$, $(p,q) = \int_{-1}^{1} p\bar{q}\, d\lambda$.

a) <u>ZZ:</u> $(H, (\cdot,\cdot))$ ist Hilbertraum.

(i) Zeige, dass $(\cdot,\cdot)$ auf H inneres Produkt ist:

·) $(p,p) = \int_{-1}^{1} |p|^2\, d\lambda = 0 \iff p = 0$ λ-fü auf $[-1,1]$

$\iff p = 0$ ~~fü~~ auf $[-1,1]$, da p stetig

$\iff p \equiv 0$ wegen Fundamentalsatz der Algebra.

·) $(p,p) > 0 \quad \forall p \in H \setminus \{0\}$

·) $(p,q) = \overline{(q,p)}$

·) Linearität im 1. Argument folgt aus Linearität des Integrals.

(ii) Zeige, dass $(H, \|\cdot\|)$ mit $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$ vollständig.

Offenbar ist $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2 \big|_H$ wobei $\|\cdot\|_2$ die Norm auf $L^2[-1,1]$ bezeichnet.

Wissen: $(L^2[-1,1], \|\cdot\|_2)$ ist vollständig.

H ist lin. Teilraum von $L^2[-1,1]$, $\dim H = n+1$ $\Rightarrow$ H abg. bzgl. $\|\cdot\|_2$

$\Rightarrow$ $(H, \|\cdot\|)$ ist vollst.

b) Sei $w \in \mathbb{C}$ fest. <u>ZZ:</u> $\exists\, k_w \in \mathbb{C}_n[z]$: $\quad p(w) = \int_{-1}^{1} p\,\overline{k_w}\, d\lambda = (p, k_w) \quad \forall p \in \mathbb{C}_n[z]$

Wissen: $\{z \mapsto z^i : i = 0,\dots,n\}$ bildet Basis von $\mathbb{C}_n[z]$.

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt $\rightsquigarrow$ ONB $\{p_i : i = 0,\dots,n\}$ von $\mathbb{C}_n[z]$.

Sei $p \in \mathbb{C}_n[z]$, d.g. $p = \sum_{i=0}^{n} (p, p_i)\, p_i$.

$$\Rightarrow p(w) = \sum_{i=0}^{n} (p, p_i) \underbrace{p_i(w)}_{\in \mathbb{C}} = \sum_{i=0}^{n} \left(p, \overline{p_i(w)} \cdot p_i\right) = \Big(p, \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \overline{p_i(w)}\, p_i}_{=\, k_w \,\in\, \mathbb{C}_n[z]}\Big)$$

c) $\exists\, M \in (-1,1)$, $|M| < n+1$ mit $\underset{\text{pos. Maß}}{\mu}((-1,1) \setminus M) = 0$.

<u>Ann.:</u> $\forall w \in \mathbb{C}\ \exists\, k_w \in \mathbb{C}_n[z]$: $p(w) = \int_{(-1,1)} p\, \overline{k_w}\, d\mu \quad \forall p \in \mathbb{C}_n[z]$.

Sei $M = \{x_1, \dots, x_\ell\}$. $(\ell \leq n)$

Def.: $p(z) := \prod_{i=1}^{\ell} (z - x_i) \in \mathbb{C}_n[z]$.

Sei ~~...~~ $w \in \mathbb{C} \setminus M$, d.g.

$$0 \neq p(w) = \int_{(-1,1)} p\, \overline{k_w}\, d\mu = \int_M \overset{\overset{0 \text{ auf } M}{\shortparallel}}{p}\, \overline{k_w}\, d\mu = 0 \quad ⚡$$

4. $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $K := \{ p \in \mathbb{R}_n[x] : p''|_{[a,b]} \geq 0 \}$

<u>ZZ:</u> Sei $f \in L^2([a,b], \lambda_1)$. $\Rightarrow \exists\, p_0 \in K$ eindeutig mit

$$\int_{[a,b]} |f - p_0|^2 \, d\lambda_1 \leq \int_{[a,b]} |f-p|^2 \, d\lambda_1 \quad \forall p \in K.$$

Zeige VS von Satz 3.2.3. (i):

- $H := L^2([a,b], \lambda_1)$ ist Hilbertraum, $K \subseteq H$. ✓
- $K \neq \emptyset$, da $0 \in K$.
- K konvex, d.h. seien $p, q \in K \Rightarrow \underbrace{\theta p + (1-\theta) q}_{\geq 0} \in K \quad \forall \theta \in [0,1]$ ✓
- K abg. in H?

Sei $t \in [a,b]$ fest. $\varphi_t : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p''(t)$ ist lin. Funktional.

$\underset{(\text{bzgl. } \|\cdot\|_2)}{\varphi_t \text{ stetig}}$, da $\mathbb{R}_n[x] \subseteq C^2[a,b]$.

$$K = \bigcap_{t \in [a,b]} \overbrace{\varphi_t^{-1}(\underbrace{[0,\infty)}_{\text{abg.}})}^{\text{abg.}} \Rightarrow K \text{ ist abg. in } \mathbb{R}_n[x]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1 \\ \mathbb{R}_n[x] \text{ lin. Teilraum von } H \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}_n[x] \text{ abg. in } H$$

$\Rightarrow K$ abg. in H.

Def. $M := \{ p - f : p \in K \} = T_{-f}(K)$.

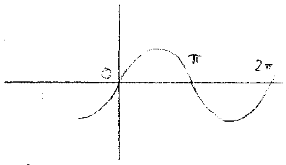
T ist Homöo., daher M ebenfalls konvex, abg. in H.

Satz 3.2.3 (i) $\Rightarrow \exists!\, x_0 \in M$: $\|x_0\|_2 = \min_{x \in M} \|x\|_2$

T bij. $\Rightarrow \exists!\, p_0 \in K$: $\|f - p_0\|_2 = \|T_{-f}(p_0)\|_2 = \|x_0\|_2$

$$= \min_{x \in M} \|x\|_2 = \min_{p \in K} \|T_{-f}(p)\|_2 = \min_{p \in K} \|f - p\|_2.$$

6. $f_n(t) := \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t)) \qquad t \in [0,1]$



a) <u>ZZ:</u> $M := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ONS ~~von~~ in $(L^2([0,1]), \lambda)$

$$f_n(t) = 1 \Leftrightarrow \sin 2^n \pi t > 0 \Leftrightarrow \exists k: \; 2^n \pi t \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

$$f_n(t) = -1 \Leftrightarrow \qquad \exists k: \; 2^n \pi t \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$$

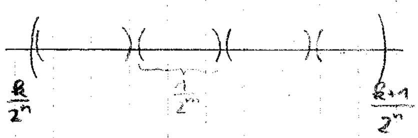
also:

$$f_n(t) = (-1)^k \Leftrightarrow \exists k: \; 2^n \pi t \in (k\pi, (k+1)\pi) \Leftrightarrow t \in \left(\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow f_n(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)}(t).$$

$$\rightarrow \| f_n \|_2^2 = \int_{[0,1]} f_n^2 \, d\lambda = \sum_{k=0}^{2^n-1} \lambda\left(\left(\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} = 1.$$

$\rightarrow$ Sei o.B.d.A $m > n$.



$$\frac{k}{2^n} = \frac{j}{2^m} \text{ für } j = k\,2^{m-n}$$

$$\frac{k+1}{2^n} = \frac{j+1}{2^m} \text{ für } j = (k+1)\,2^{m-n} - 1$$

$$\Rightarrow \left[\tfrac{k}{2^n}, \tfrac{k+1}{2^m}\right] = \bigcup_{j=k2^{m-n}}^{(k+1)2^{m-n}-1} \left[\tfrac{j}{2^m}, \tfrac{j+1}{2^m}\right]$$

$$\Rightarrow \int_{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)} f_n \overline{f_m} \, d\lambda = \int_{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)} (-1)^k \left[\sum_{j=k2^{m-n}}^{(k+1)2^{m-n}-1} (-1)^j \mathbb{1}_{\left(\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}\right)} \right] d\lambda$$

$$= (-1)^k \underbrace{\sum_{j=k2^{m-n}}^{(k+1)2^{m-n}-1} (-1)^j \frac{1}{2^m}}_{= 0, \text{ da } 2^{\overset{\neq 0}{m-n}} \text{ Summanden}} = 0.$$

$$\Rightarrow (f_n, f_m) = \int_{[0,1]} f_n \overline{f_m} \, d\lambda = 0.$$

b) <u>ZZ:</u> M ist nicht ONB von $L^2([0,1], \lambda)$

$$(t \mapsto 1) \in L^2[0,1], \quad \|(t \mapsto 1)\| = \lambda([0,1]) = 1$$

$$(f_n, (t \mapsto 1)) = \int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = \underbrace{\sum_{k=0}^{2^n-1} (-1)^k \frac{1}{2^k}}_{= 0, \text{ da } 2^n \text{ Summanden}} = 0.$$

7. Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

a) ZZ: $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ONS.

·) $\|u_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

·) ~~Sei $N \in \mathbb{N}$. Zeige $\{u_n : 1 \le n \le N\}$ ist ONS.~~
~~Vollständige Induktion nach N:~~
Zeige, dass $\{u_n : 1 \le n \le N\}$ ist ONS $\forall N \in \mathbb{N}$. (vollst. Induktion)

-) $N=2$: $(v_2, u_1) = (x_2, u_1) - (x_2, u_1)\underbrace{(u_1, u_1)}_{\|u_1\|^2 = 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad (u_2, u_1) = 0$

-) Ann.: $\{u_n : 1 \le n \le N\}$ ist ONS.

-) $N \mapsto N+1$: Sei $1 \le n \le N$.

$$(v_{N+1}, u_n) = (x_{N+1}, u_n) - \sum_{i=1}^{N} (x_{N+1}, u_i)\underbrace{(u_i, u_n)}_{\delta_{i,n}} = (x_{N+1}, u_n) - (x_{N+1}, u_n) = 0$$

$\Rightarrow \{u_n : 1 \le n \le N\}$ ist ONS $\forall N \in \mathbb{N}$.

Damit ist auch $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONS, denn seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, o.B.d.A $n_1 < n_2$

$\Rightarrow u_{n_1}, u_{n_2} \in \{u_n : 1 \le n \le n_2\}$ – ist ONS $\Rightarrow (u_{n_1}, u_{n_2}) = 0$.

b) ZZ: $\operatorname{span}\{u_1, \dots, u_N\} = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_N\} \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

-) $N = 1$ ✓

-) $N \mapsto N+1$:

Sei $x \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{N+1}\}$.

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i u_i = \alpha_{N+1} u_{N+1} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i$$
$$= \frac{\alpha_{N+1}}{\|v_{N+1}\|}\left(x_{N+1} - \sum_{i=1}^{N}(x_{N+1}, u_i)u_i\right) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i$$
$$= \frac{\alpha_{N+1}}{\|v_{N+1}\|} x_{N+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\alpha_i - \frac{\alpha_{N+1}}{\|v_{N+1}\|}(x_{N+1}, u_i)\right) u_i}_{= \sum_{i=1}^{N} \beta_i x_i \quad (\beta_i \text{ eindeutig!})} \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{N+1}\}$$

$\Rightarrow \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_{N+1}\} \subseteq \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_{N+1}\}$. Aus Dimensionsgründen gilt Gleichheit.

c) ZZ: $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $H \Rightarrow \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist ONB.

folgt sofort aus b) und Kor. 3.3.4.

8. $L^2([0,2\pi), \mu)$, $\mu := \frac{1}{2\pi}\lambda_1$

$e_n(t) := e^{int} \quad (n \in \mathbb{Z}) \qquad u_n(t) := \dfrac{e_n(t) + n e_n(t)}{\sqrt{1+n^2}} \quad (n \in \mathbb{N})$

$E := \{e_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $M := \overline{\operatorname{span} E}$

$U := \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, $N := \overline{\operatorname{span} U}$

a) (i) <u>ZZ:</u> E ist ONB von M.

$$(e_n, e_m) = \int_{[0,2\pi)} e_n \overline{e_m}\, d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi)} e^{int} e^{-imt}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\, dt = \delta_{n,m}.$$

$\Rightarrow E$ ist ONS, $\operatorname{span} E \subseteq M$ dicht $\Rightarrow E$ ist ONB von M.
~~(da e_n l.u.)~~ $(z \mapsto z^n)$ l.u. $\Rightarrow$ auch Einschr. auf ... l.u., $t \mapsto e^{it}$ Bij. $[0,2\pi) \to$ ... $\Rightarrow t \mapsto (e^{it})^n$ l.u.

(ii) <u>ZZ:</u> U ist ONB von N.

$$(u_n, u_m) = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}\sqrt{1+m^2}}\Big(\underbrace{(e_{-n}, e_{-m})}_{\delta_{nm}} + n\underbrace{(e_{-n}, e_m)}_{0} + m\underbrace{(e_n, e_{-m})}_{0} + nm\underbrace{(e_n, e_{-m})}_{\delta_{nm}}\Big) = \delta_{nm}.$$

$\Rightarrow U$ ist ONS, $\operatorname{span} U \subseteq N$ dicht $\Rightarrow U$ ist ONB von N.
~~(da u_n l.u.)~~

b) <u>ZZ:</u> $M \cap N = \{0\}$

$M \cap N = \{0\} \Leftrightarrow (\underbrace{M \cap N}_{\text{abg.}})^\perp = H$

- $M^\perp, N^\perp \subseteq (M\cap N)^\perp \Rightarrow M^\perp + N^\perp \subseteq (M \cap N)^\perp$.
- $(e_{-m}, e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \{e_{-m} : m \in \mathbb{N}\} \subseteq M^\perp$
- $(e_m - m e_{-m}, e_{-n} + n e_n) = -m\underbrace{(e_{-m}, e_{-n})}_{\delta_{nm}} + n\underbrace{(e_m, e_n)}_{\delta_{nm}} = 0$

$\Rightarrow \{e_m - m e_{-m} : m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq N^\perp$

$$\Rightarrow \{e_n : n \in \mathbb{Z}\} = \underbrace{\{e_{-m} : m \in \mathbb{N}\}}_{\subseteq M^\perp} \cup \{\underbrace{e_0 - 0e_0}_{1 \in N^\perp}\} \cup \{\underbrace{e_m - m e_{-m}}_{\in N^\perp} + \underbrace{m e_{-m}}_{\in M^\perp} : m \in \mathbb{N}\}$$
$$\subseteq M^\perp + N^\perp \subseteq (M \cap N)^\perp$$

Wissen (S. 50) $\quad H = L^2([0,2\pi),\mu) = \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}} \subseteq \overline{(M\cap N)^\perp} \overset{\text{abg.}}{=} (M \cap N)^\perp \subseteq H$.

$\Rightarrow H = (M \cap N)^\perp$.

c) (i) <u>ZZ:</u> $M + N$ dicht in H.

$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq M + N \Rightarrow H = \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}} \subseteq \overline{M+N} \Rightarrow H = \overline{M+N}$

(ii) <u>ZZ:</u> $M+N \neq H$.

Zeige, dass $\widetilde{id} := i \cdot id \notin M+N$.

Sei $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, d.g.

$$(id, e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\, e^{-int}\, dt = -\frac{1}{2\pi}\, t\, \frac{1}{in}\, e^{-int}\Big|_{t=0}^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\, \frac{1}{in} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-int}\, dt}_{0} = -\frac{1}{in}.$$

$$\Rightarrow (\widetilde{id}, e_n) = -\frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

$$(\widetilde{id}, \underset{t \mapsto 1}{e_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} it\, dt = \frac{i}{2\pi}\, \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = i\pi$$

<u>Ann.:</u> $M+N = H \Rightarrow \exists!\ y \in M,\ z \in N:\ \widetilde{id} = y+z$

$$y = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (y, e_n) e_n \qquad z = \sum_{m \in \mathbb{N}} (z, u_m) u_m$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow (\widetilde{id}, e_{-n}) = (y, e_{-n}) + (z, e_{-n})$.

$$(y, e_{-n}) = \Big(\lim_N \sum_{n=0}^{N} (y, e_n) e_n, e_{-n} \Big)$$

$$\underset{\text{stet.}}{=} \lim_N \sum_{n=0}^{N} (y, e_n) \underbrace{(e_n, e_{-n})}_{0} = 0.$$

$$(z, e_{-n}) = \ldots = \sum_{m \in \mathbb{N}} (z, u_m)(u_m, e_{-n}) = (z, u_n)\, \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$$

$$(u_m, e_{-n}) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \Big(\underbrace{(e_{-m}, e_{-n})}_{\delta_{n,m}} + m \underbrace{(e_m, e_{-n})}_{0} \Big)$$

$$\Rightarrow \underset{= \frac{1}{n}}{(\widetilde{id}, e_{-n})} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} (z, u_n) \quad \Leftrightarrow \quad (z, u_n) = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n}.$$

$$\Rightarrow \infty \underset{\text{da } z \in N \subseteq H}{>} \|z\|_H = \sum_{n \in \mathbb{N}} |(z, u_n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1+n^2}{n^2} = \infty \quad ↯$$

d) <u>ZZ:</u> $P_M : X = M \dotplus N \to M$, $x = x_M + x_N \mapsto x_M$ ist nicht stetig ($\Leftrightarrow \|P_M\| = \sup_{\|x\|=1} \|P_M x\| = \infty$)

Sei $x = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} e_{-n}$, $k \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \|x\|_H = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} 1 = 1$.

$$e_{-n} = \sqrt{1+n^2}\, u_n - n e_n$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} \sqrt{1+n^2}\, u_n}_{x_N \in N} + \underbrace{\Big(-\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} n e_n\Big)}_{x_M \in M}$$

$$\Rightarrow \|P_M x\|_H = \|x_M\|_H = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} n = \frac{1}{k}\, \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\|=1} \|P_M x\| = \infty.$$