Funktionalanalysis UE

II, 1. (X_n, d_n) metr. Räume, $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $d(f,g) := \sup_n \left(\frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,g_n)\right)$, $\hat{d}_n(f_n,g_n) := \frac{d_n(f_n,g_n)}{1+d_n(f_n,g_n)}$

a) <u>ZZ:</u> (X,d) ist metr. Raum.

∘) $d(f,g) \geq 0$ ✓

$d(f,g)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,g_n)=0 \ \forall n \Leftrightarrow f_n = g_n \ \forall n \Leftrightarrow f=g$.

∘) $d(f,g) = d(g,f)$ ✓

∘) $d(f,h) = \sup_n\left(\frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,h_n)\right) \leq \sup_n\left(\frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,g_n)+\frac{1}{n}\hat{d}_n(g_n,h_n)\right)$

$\leq d(f,g) + d(g,h)$.

b) <u>ZZ:</u> $\tau_d = \tau := \prod_n \tau_{d_n}$ (Produkttop.)

Zur Erinnerung: $O = \prod_n O_n \in \tau \Leftrightarrow O_n \in \tau_n \ \forall n\in\mathbb{N} \wedge O_n = X_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

Wissen aus Bsp. I.2: $\tau_{d_n} = \tau_{\hat{d}_n}$

„$\subseteq$" Sei $f\in X$, $g\in U_\varepsilon^d(f)$. $\Leftrightarrow d(f,g)<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,g_n)<\varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

Wähle $N\in\mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{N}<\varepsilon$.

∘) $n<N$: $\frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,g_n)<\varepsilon \Leftrightarrow \hat{d}_n(f_n,g_n)<n\cdot\varepsilon$

∘) $n\geq N$: $\frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,g_n)<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$, da $\hat{d}_n(f_n,g_n)<1$.

Also: $g\in\prod_{n=1}^{N-1}U_{n\cdot\varepsilon}(f_n)\times\prod_{n=N}^{\infty}X_n =: O \ (\in\tau) \Rightarrow g\in U_\varepsilon^d(f)$

d.h. $O\subseteq U_\varepsilon^d(f)$. $\Rightarrow U_\varepsilon^d(f)\in\tau$

$U_\varepsilon^d(f)$ durchläuft ~~ein~~ Basis von $\tau_d \Rightarrow \tau_d\subseteq\tau$.

„$\supseteq$" Sei $f\in X$, $g\in\prod_n U_{\varepsilon_n}^{\hat{d}_n}(f_n)$ mit $\varepsilon_n=1$ ($\Leftrightarrow U_{\varepsilon_n}^{\hat{d}_n}(f_n)=X_n$) für fast alle $n\in\mathbb{N}$.

Def.: $M := \{n\in\mathbb{N} : \varepsilon_n<1\}$.

Sei $n\in M$ beliebig, dann soll ein $\gamma>0$ existieren, sodass

$\frac{1}{n}\hat{d}_n(f_n,g_n) < \max_{m\in M}\frac{1}{m}\hat{d}_m(f_m,g_m) < \gamma < \frac{1}{n}\varepsilon_n$.

Wähle z.B. $\gamma := \min_{m\in M}\frac{1}{m}\varepsilon_m$ (<1), damit gilt

$g\in U_\gamma^d(f) \Rightarrow g\in\prod_n U_{\varepsilon_n}^{\hat{d}_n}(f_n)$, d.h. $U_\gamma^d(f)\subseteq\prod_n U_{\varepsilon_n}^{\hat{d}_n}(f_n)$.

$\Rightarrow \prod_n U_{\varepsilon_n}^{\hat{d}_n}(f_n)\in\tau_d$. Diese Mengen bilden Basis von $\tau \Rightarrow \tau\subseteq\tau_d$.

2.a) ges.: alle kreisförmigen Teilmengen von $\mathbb{C}$.

$A \subseteq \mathbb{C}$ kreisförmig $\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow \lambda x \in A \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1)$

Beh.: $A \subseteq \mathbb{C}$ kreisförmig $\Leftrightarrow A \in \{\emptyset, \mathbb{C}, \{0\}\} \cup \{U_\eta(0), K_\eta(0) : \eta > 0\}$.

„$\Leftarrow$" für $A \in \{\emptyset, \mathbb{C}, \{0\}\}$ trivial

Sei $x \in U_\eta(0)$, d.h. $|x| < \eta$.

$\Rightarrow |\lambda x| = |\lambda||x| < \eta \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1$

$\Rightarrow \lambda x \in U_\eta(0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1$.

„$\Rightarrow$" Sei A kreisförmig, $A \neq \emptyset$ und $x \in A$.

Lt. VS: $\lambda x \in A \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow K_{|x|}(0) \subseteq A$.

Es gilt daher $\bigcup_{x \in A} K_{|x|}(0) \subseteq A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} K_{|x|}(0)$.

$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} K_{|x|}(0)$ und somit $A \in \{U_\eta(0), K_\eta(0) : \eta > 0\} \cup \{\mathbb{C}, \{0\}\}$.

Definiere: $A \subseteq \mathbb{R}$ kreisförmig $\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow \lambda x \in A \quad \forall \lambda \in [-1, 1])$

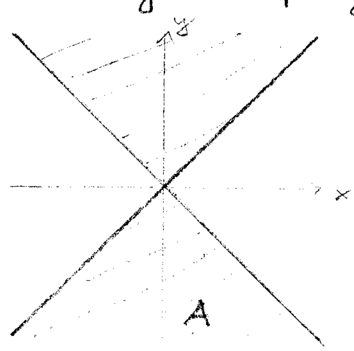
ges.: alle kreisförmigen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

analog zum Fall $\mathbb{C}$: $A \subseteq \mathbb{R}$ kreisförmig $\Leftrightarrow A \in \{\underbrace{U_\eta(0)}_{(-\eta,\eta)}, \underbrace{K_\eta(0)}_{[-\eta,\eta]} : \eta > 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}, \{0\}\}$

3. Finde eine kreisförmige Menge, deren Inneres nicht kreisförmig ist.

-) Mit obiger Definition folgt, dass $A := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$ kreisförmig ist.

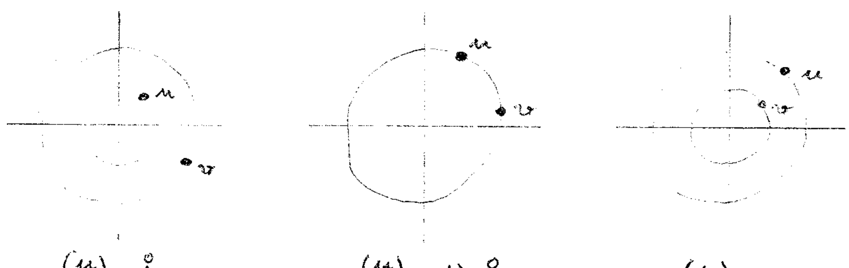
$\mathring{A}$ ist nicht kreisförmig, da $\binom{0}{0} \notin \mathring{A}$.



-) Analog kann man so ein Bsp. für $\mathbb{C}^2$ durch

$A := \{\binom{u}{v} \in \mathbb{C}^2 : |u| \leq |v|\}$ definieren.

$\binom{u}{v} \in A$ g.d.w. u in der Gaußschen Zahlenebene weiter innen liegt als v.

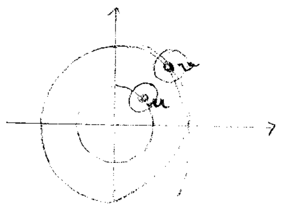


$\binom{u}{v} \in \mathring{A}$ $\qquad$ $\binom{u}{v} \in A \setminus \mathring{A}$ $\qquad$ $\binom{u}{v} \notin A$

Zeige $M := \left\{ \binom{u}{v} \in \mathbb{C}^2 : |u| < |v| \right\} = \mathring{A}$.

„⊆" Sei $\binom{u}{v} \in M$. Finde Umgebung $U_\varepsilon(u) \times U_\varepsilon(v) \subseteq M$.

$U_\varepsilon(u) \times U_\varepsilon(v) \subseteq M \Leftarrow |x| < |y| \quad \forall x \in U_\varepsilon(u), \forall y \in U_\varepsilon(v)$.



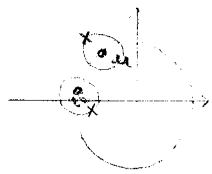
Setze $\varepsilon := \frac{|v|-|u|}{2}$, denn:

$$|x| < \varepsilon + |u| = \frac{|v|-|u|}{2} + |u| = \frac{|v|+|u|}{2}$$
$$= |v| - \frac{|v|-|u|}{2} = |v| - \varepsilon < |y|.$$

$\Rightarrow M$ ist offen in $\mathbb{C}^2$, $M \subseteq A \Rightarrow M \subseteq \mathring{A}$.

„2" Sei $\binom{u}{v} \in A \setminus M$, d.h. $|u| = |v|$. ZZ: $x \notin \mathring{A}$ d.h. $\nexists\, U \in \mathcal{U}\left(\binom{u}{v}\right)$ mit $U \subseteq A$.

Betrachte Umgebungsbasis von $\binom{u}{v}$ der Form $U_\varepsilon(u) \times U_\delta(v)$.



Ann.: $\exists\, \varepsilon, \delta > 0$: $U_\varepsilon(u) \times U_\delta(v) \subseteq A$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1+\frac{\varepsilon}{2})u \\ v \end{pmatrix} \in U_\varepsilon(u) \times U_\delta(v)$, aber $\left|(1+\frac{\varepsilon}{2})u\right| > |u| = |v|$ ↯ zu $\subseteq A$.

also: A ist kreisförmig, $\mathring{A}$ nicht, da $(0,0)^T \notin \mathring{A}$.

4. a) ~~ZZ:~~ $(H, (\cdot,\cdot))$ SKP-Raum, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in H.

ZZ: $\lim_n \|x_n - x\| = 0 \iff \begin{cases} \lim_n \|x_n\| = \|x\| \\ \lim_n (x_n, y) = (x, y) \quad \forall y \in H. \end{cases}$

„⇐" $\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = (x_n, x_n) - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n, x) + (x, x)$

$$= \underbrace{\|x_n\|^2}_{\to \|x\|^2} - 2\,\mathrm{Re}\,\underbrace{(x_n, x)}_{\to (x,x)} + \|x\|^2 \to 0.$$
$(x,x) \to \|x\|^2$

„⇒" •) $\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \le \|x_n - x\| \to 0$.

•) $|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \overset{\text{C-S}}{\le} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|y\|}_{<\infty} \to 0 \quad \forall y \in H$.

b) ZZ: Für Gültigkeit der Äquivalenz genügt $\lim_n (x_n, y) = (x, y)$ $\forall y \in D$ wobei $D \subseteq H$ dicht.

Nur ZZ: $\lim_n (x_n, x) = (x, x) \quad \forall x \notin D$.

Sei $x \notin D$. $\Rightarrow \exists$ Folge $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_m y_m = x$ (bzgl. $\|\cdot\|$)

$\Rightarrow \lim_n (x_n, x) = \lim_n (x_n, \lim_m y_m) \overset{\text{stet.}}{=} \lim_n \lim_m (x_n, y_m)$

$= \lim_m \lim_n (x_n, y_m) = \lim_m (x, y_m) = (x, \lim_m y_m) = (x, x)$.

$\exists S > 0$: $\|x_n\| \le S$, $\|y_m\| \le S$ da Folgen konv.
$(\cdot,\cdot)$ glm. stet. auf $K_S(0) \times K_S(0)$

5. $(X_j, (\cdot,\cdot)_j)$ SKP-Räume

<u>Vorbemerkung:</u>

Sei $(\lambda_j)_{j\in J} \in [0,\infty)^J$. Man überlegt sich leicht, dass

$$\sup\left\{\sum_{j\in K}\lambda_j : K\subseteq J,\ |K|<\infty\right\} = \sup\left\{\sum_{j\in K}\alpha_j : 0\le\alpha_j\le\lambda_j,\ K\subseteq J,\ |K|<\infty\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{j\in J}\lambda_j := \sup_{\substack{K\subseteq J\\|K|<\infty}}\sum_{j\in K}\lambda_j = \sup\Big\{\underbrace{\sum_{j\in K}\alpha_j}_{=\int_J\left(\sum_{j\in K}\alpha_j \mathbb{1}_{\{j\}}\right)d\varrho} : 0\le\alpha_j\le\lambda_j,\ K\subseteq J,\ |K|<\infty\Big\}$$

Raum der pos. isolierten TPFKT.

$$= \sup\left\{\int_J t\,d\varrho : t\in\mathcal{T}^+,\ t\le(\lambda_j)_{j\in J}\right\} = \int_J \lambda_j\,d\varrho(j) \quad\square$$

Mit der Notation von Bsp. I.6 setze $p=2$.

a) <u>ZZ:</u> Es existiert ein inneres Produkt $(\cdot,\cdot)$ auf X, das $\|x\| := \left(\sum_J \|x_j\|_j^2\right)^{\frac12}$ induziert.

Def.: $$((x_j)_{j\in J}, (y_j)_{j\in J}) := \int_J \underbrace{(x_j, y_j)_j}_{\in\mathbb{C}!}\,d\varrho(j).$$

∘) $(\cdot,\cdot)$ wohldefiniert:

$$\left|\int_J (x_j,y_j)\,d\varrho\right| \le \int_J |(x_j,y_j)|\,d\varrho \overset{\text{C-S auf } X_j}{\le} \int_J \|x_j\|\,\|y_j\|\,d\varrho \overset{\text{C-S auf } L^2}{\le} \int_J \|x_j\|^2 d\varrho\cdot\int_J\|y_j\|^2 d\varrho < \infty.$$

$(x_j)_{j\in J}\in L^2(J,\varrho)$, $(y_j)_{j\in J}\in L^2(J,\varrho)$

∘) $(\cdot,\cdot)$ induziert $\|\cdot\|$:

$$\|(x_j)_{j\in J}\|^2 = ((x_j)_{j\in J}, (x_j)_{j\in J}) = \int_J (x_j,x_j)_j\,d\varrho = \int_J \|x_j\|_j^2\,d\varrho = \sum_{j\in J}\|x_j\|_j^2.$$

∘) $(\cdot,\cdot)$ ist SKP auf X.

(i) $((x_j)_{j\in J},(x_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J}\|x_j\|_j^2 > 0$ für $(x_j)_{j\in J}\ne 0$.

(ii) $$((x_j)_{j\in J},(y_j)_{j\in J}) = \int_J (x_j,y_j)_j\,d\varrho = \int_J \overline{(y_j,x_j)_j}\,d\varrho = \overline{\int_J (y_j,x_j)_j\,d\varrho} = \overline{((y_j)_{j\in J},(x_j)_{j\in J})}$$

(iii) $$((x_j)_{j\in J}+(y_j)_{j\in J},(z_j)_{j\in J}) = \int_J \underbrace{(x_j+y_j,z_j)_j}_{=(x_j,z_j)_j+(y_j,z_j)_j}\,d\varrho = \int_J (x_j,z_j)_j\,d\varrho + \int_J (y_j,z_j)_j\,d\varrho$$
$$= ((x_j)_{j\in J},(z_j)_{j\in J}) + ((y_j)_{j\in J},(z_j)_{j\in J})$$

(iv) $(\alpha(x_j)_{j\in J},(z_j)_{j\in J}) = \alpha((x_j)_{j\in J},(z_j)_{j\in J})$ analog.

b) ZZ: Sei $j_0 \in J$. $\exists \iota : X_{j_0} \to X$ isometrisch, d.h. $(\iota(x), \iota(y)) = (x,y)_{j_0}$ $\forall x,y \in X_{j_0}$.

$\iota(X_{j_0})$ ist abgeschlossen.

Definiere: $\iota : X_{j_0} \to X$, $x \mapsto \iota(x)$ wobei $\underbrace{\iota(x)_j}_{j\text{-te Komponente}} := \begin{cases} x & j = j_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

$$\Rightarrow (\iota(x), \iota(y)) = \int_J (\iota(x)_j, \iota(y)_j)_j \, d\mathfrak{f} = (\iota(x)_{j_0}, \iota(y)_{j_0})_{j_0} = (x,y)_{j_0}$$

$\iota(X_{j_0}) = \prod_{j \in J} Y_j$ wobei $Y_j := \begin{cases} X_j & j = j_0 \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\iota(X_{j_0})$ ist abg. (in X), da alle Komponenten abg. (in X_j) sind.

c) ZZ: $(X, (\cdot,\cdot))$ Hilbertraum g.d.w. $(X_j, (\cdot,\cdot)_j)$ Hilberträume $\forall j \in J$.

Da $(\cdot,\cdot)$ die Norm von Bsp. I.6 induziert, folgt das direkt aus Bsp. I.7.

b) <u>ZZ:</u> Sei $j_0 \in J$. $\exists \iota: X_{j_0} \to X$ isometrisch, d.h. $(\iota(x), \iota(y)) = (x,y)_{j_0} \quad \forall x,y \in X_{j_0}$.

$\iota(X_{j_0})$ ist abgeschlossen.

Definiere: $\iota: X_{j_0} \to X$, $x \mapsto \iota(x)$ wobei $\underbrace{\iota(x)_j}_{j\text{-te Komponente}} := \begin{cases} x & j = j_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

$$\Rightarrow (\iota(x), \iota(y)) = \int_J (\iota(x)_j, \iota(y)_j)_j \, d\rho = (\iota(x)_{j_0}, \iota(y)_{j_0})_{j_0} = (x,y)_{j_0}$$

$\iota(X_{j_0}) = \prod_{j \in J} Y_j$ wobei $Y_j := \begin{cases} X_j & j = j_0 \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}$ ~~$\Rightarrow \iota(X_{j_0})$ ist abg. (in X), da alle Komponenten abg. sind. (in X_j)~~

(*)

c) <u>ZZ:</u> $(X, (\cdot,\cdot))$ Hilbertraum g.d.w. $(X_j, (\cdot,\cdot)_j)$ Hilberträume $\forall j \in J$.

Da $(\cdot,\cdot)$ die Norm von Bsp. I.6 induziert, folgt das direkt aus Bsp. I.7.

(*) Zeige, $\iota(X_{j_0})^c$ ist offen.

Sei $x \in \iota(X_{j_0})^c$. $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow r := \sup_{\substack{j \in J \\ j \neq j_0}} \|x_j\|_j^2 > 0$ (und $< \infty$).

Sei $y \in \iota(X_{j_0})$ beliebig. $\Rightarrow y_j = 0 \quad j \neq j_0$.

$$\Rightarrow \|x-y\|^2 = \sum_{j \in J} \|x_j - y_j\|_j^2 = \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq j_0}} \|x_j\|_j^2 + \|x_{j_0} - y_{j_0}\|_{j_0}^2 \geq r.$$

$\Rightarrow K_r(x) \cap \iota(X_{j_0}) = \emptyset \Rightarrow K_r(x) \subseteq \iota(X_{j_0})^c$. ∎

7. Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$. $\quad (x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$

$b := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad e_k := (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$

a) <u>ZZ:</u> $A := \{b, e_1, e_2, \dots\}$ ist l.u. in ℓ^2.

Ann.: A ist linear abhängig. $\Rightarrow \exists \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ mit

$$\lambda_0 b + \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k e_k = 0.$$

Der 2. Summand ist nur an endlich vielen Stellen $\neq 0$, aber $b_n \neq 0 \;\forall n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow \lambda_0 = 0$.

Für $1 \leq n \leq \ell$ beliebig gilt dann

$$0 = \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k \delta_{kn} = \lambda_n \quad \Rightarrow \lambda_n = 0 \quad \forall 1 \leq n \leq \ell.$$

b) <u>ZZ:</u> $\phi: \ell^2 \to \mathbb{C}$ linear mit $\phi(b) = 1$, $\phi(e_n) = 0 \;\forall n\in\mathbb{N}$ ist unstetig.

$\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ist ONS in $\ell^2(\mathbb{N})$ und sogar ONB von $\ell^2(\mathbb{N})$ denn angenommen

$\exists x \in \ell^2, \|x\| = 1 \Rightarrow \exists n : x_n \neq 0 \Rightarrow (x, e_n) = x_n \neq 0 \Rightarrow x \not\perp e_n$.

Es gilt daher $b = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(b, e_n)}_{\frac{1}{n}} e_n = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n$.

Ann.: ϕ stetig, dann gilt

$$1 = \phi(b) = \lim_N \phi\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n\right) \overset{\phi \text{ lin.}}{=} \lim_N \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \phi(e_n) = 0 \quad \lightning.$$

c) $\exists$ ein solches lineares Funktional?

Ergänze die l.u. Menge $A = \{b, e_1, e_2, \dots\}$ zu einer Basis $B \supseteq A$ von $\ell^2(\mathbb{N})$

(Basis $\hat{=}$ max. l.u. Familie, existiert nach Lemma von Zorn)

Definiere das lineare Funktional $\phi: \ell^2 \to \mathbb{C}$ durch

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 & x \in A\setminus b \\ 1 & x = b \\ \text{bel.} & x \in B\setminus A \end{cases}$$

ϕ ist dadurch wohldefiniert, denn da ϕ linear ist, reicht es, die Funktionswerte auf einer Basis von ℓ^2 vorzugeben. Die Fortsetzung auf ℓ^2 ist dann eindeutig.

8. $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum

a) ZZ: $\dim X = \infty \Rightarrow X^* \neq X'$

Wähle eine l.u. Menge $\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Sei o.B.d.A. $\|b_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Definiere $\phi : X \to \mathbb{C}$ l.u. sodass $\phi(b_n) = n$ (wohldef., da b_n l.u.)

$$\Rightarrow \|\phi\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|\phi(b_n)|}{\|b_n\|} = |\phi(b_n)| = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \phi \text{ unbeschränkt} \\ \phi \text{ linear} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \phi \text{ unstetig} \Rightarrow X' \subsetneq X^*.$$

b) analog mit $\dim X < \infty$?

$$\dim X < \infty \overset{2.1.16}{\Rightarrow} \text{alle lin. Teilräume von } X \text{ abg.}$$

$$\Rightarrow \ker \phi \text{ ist abg.} \quad \forall \phi \in X^*$$

$$\underset{2.1.14}{\Rightarrow} \phi \text{ ist stetig } \forall \phi \in X^* \quad \Leftrightarrow \quad X' = X^*.$$