Funktionalanalysis UE

I, 1. $X := \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $d_1(x,y) := |x-y|$, $d_2(x,y) := \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$

(i) Finde Vervollständigungen zu (X, d_1), (X, d_2).

Vervollst. von (X, d_1): $((\mathbb{R}, d_1), id)$

- $(\mathbb{R}, d_1)$ vollständig
- id isometrisch
- $\overline{X} = \mathbb{R}$ (bzgl. d_1)

Vervollst. von (X, d_2): $((\mathbb{R}, d_1), \iota)$ mit $\iota(x) := \frac{1}{x}$

- $(\mathbb{R}, d_1)$ vollständig
- $d_1(\iota(x), \iota(y)) = d_2(x,y)$ $\forall x,y \in X$ $\Rightarrow$ ι isometrisch
- $\overline{\iota(X)} = \overline{X} = \mathbb{R}$ (bzgl. d_1)

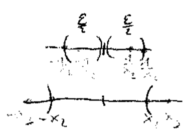
(ii) Seien $f: X \to X: x \mapsto x$, $g: X \to X: x \mapsto \frac{1}{x}$.

Welche der Abb. $f: (X, d_i) \to (X, d_j)$ und $g: (X, d_i) \to (X, d_j)$ sind glm. stetig?

(1) $f: (X, d_1) \to (X, d_1)$ ✓ $(\delta = \varepsilon)$ | d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: d_i(x,y) < \delta \Rightarrow d_j(f(x), f(y)) < \varepsilon$ $\forall x,y \in X$

(2) $f: (X, d_2) \to (X, d_2)$ ✓ $(\delta = \varepsilon)$

(3) $f: (X, d_1) \to (X, d_2)$



Sei $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n := -\frac{n}{\varepsilon}$, $y_n := \frac{n}{\varepsilon}$. $\Rightarrow$ $d_2(f(x_n), f(y_n)) = d_1\left(-\frac{\varepsilon}{n}, \frac{\varepsilon}{n}\right) < \varepsilon$ $\forall n > 2$

aber $d_1(x_n, y_n) = \frac{2n}{\varepsilon}$ ist unbeschränkt! $\Rightarrow \nexists\, \delta$ das die glm. Stetigkeitsbed. erfüllt.

(4) $f: (X, d_2) \to (X, d_1)$

analog (3) mit $x_n := -\frac{\varepsilon}{n}$, $y_n := \frac{\varepsilon}{n}$

(5) $g: (X, d_1) \to (X, d_1)$

$d_1(g(x), g(y)) = d_1\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = d_2(x,y) = d_2(f(x), f(y))$ $\Rightarrow$ analog zu (3)

(6) $g: (X, d_2) \to (X, d_2)$ analog zu (4)

(7) $g: (X, d_1) \to (X, d_2)$

$d_2(g(x), g(y)) = d_1(x,y)$ $\Rightarrow$ glm. stetig mit $\delta = \varepsilon$.

(8) $g: (X, d_2) \to (X, d_1)$

$d_1(g(x), g(y)) = d_2(x,y)$ $\Rightarrow$ —— " ——

2. (X, d) metrischer Raum, $\hat{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ $(x,y \in X)$

(i) <u>ZZ:</u> $\hat{d}$ ist Metrik.

∘) $\hat{d} \geq 0$, $\hat{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

∘) $\hat{d}(x,y) = \hat{d}(y,x)$

∘) $\hat{d}(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,z)} \leq 1 - \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)}$

$$= \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = \hat{d}(x,y) + \hat{d}(y,z).$$

(ii) <u>ZZ:</u> $\tau_{\hat{d}} = \tau_d$

Sei $d(x,y) < \varepsilon$. $\Rightarrow \hat{d}(x,y) = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} < 1 - \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} =: \hat{\varepsilon}$ $\quad \forall x,y \in X$.

$\Rightarrow U_\varepsilon^d(x) = U_{\hat{\varepsilon}}^{\hat{d}}(x) \quad \forall x \in X \Rightarrow \tau_d \subseteq \tau_{\hat{d}}$

Sei $\underset{[0,1)}{\underset{\Uparrow}{\hat{d}(x,y)}} < \hat{\varepsilon} \overset{<1}{\Leftrightarrow} \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \hat{\varepsilon} \Leftrightarrow d(x,y) < \frac{\hat{\varepsilon}}{1-\hat{\varepsilon}} =: \varepsilon \quad \forall x,y \in X$

$\Rightarrow \tau_{\hat{d}} \subseteq \tau_d$

3. $X = C^2[0,1]$, $\|f\|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$, $\|f\|_2 := \|f''\|_\infty + |f(0)| + |f(1)|$

$\|f\|_3 := \|f''\|_\infty + |f(0)| + |f'(0)|$

(i) <u>ZZ:</u> Die Normen sind äquivalent.

∘) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$

Sei $f \in C^1[0,1] \Rightarrow |f(x)| = |f(0) + \int_0^x f' \, d\lambda| \leq |f(0)| + |\int_0^x f' \, d\lambda|$

$$\leq |f(0)| + \|f'\|_\infty \cdot x \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \forall x \in [0,1]$$

$\Rightarrow \|f\| \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty$

analog $f' \in C^1[0,1] \Rightarrow \|f'\| \leq |f'(0)| + \|f''\|_\infty$

$\Rightarrow \|f\|_3 \overset{\text{klar}}{\leq} \|f\|_1 \leq |f(0)| + 2|f'(0)| + 3\|f''\|_\infty \leq 3\|f\|_3$

∘) $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$

lt. oben gilt $|f(1)| \leq |f(0)| + |f'(0)| + \|f''\|_\infty$

$\Rightarrow \|f\|_2 \leq 2\|f''\|_\infty + 2|f(0)| + |f'(0)| \leq 2\|f\|_3$

$f \in C^2([0,1], \mathbb{C}) \Rightarrow \operatorname{Re} f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$.

Sei $x \in [0,1]$. Satz von Taylor:

$$(\operatorname{Re} f)(x) = (\operatorname{Re} f)(0) + (\operatorname{Re} f)'(0)x + \frac{(\operatorname{Re} f)''(\xi)}{2} x^2 \quad \text{für ein } \xi \in (0,x).$$

Analog für $\operatorname{Im} f$ mit einem $\zeta \in (0,x)$.

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{(\operatorname{Re} f)''(\xi) + i(\operatorname{Im} f)''(\zeta)}{2} x^2$$

Für $x=1$ folgt daraus $|f'(0)| = \left| f(1) - f(0) - \frac{\cdots}{2} \right|$

$$\leq |f(1)| + |f(0)| + \|f''\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f\|_3 \leq |f(1)| + 2|f(0)| + 2\|f''\|_\infty \leq 2\|f\|_2$$

•) $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$

lt. oben: $\frac{1}{2}\|f\|_2 \leq \|f\|_3 \leq \|f\|_1 \leq 3\|f\|_3 \leq 6\|f\|_2$.

(ii) <u>ZZ:</u> $(X, \|\cdot\|_i)$ ist vollständig für $i = 1, 2, 3$.

Betrachte $(X, \|\cdot\|_1)$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CF bzgl. $\|\cdot\|_1$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon \quad \forall n,m > N.$$

$$\|f_n - f_m\|_1 = \|f_n - f_m\|_\infty + \|f_n' - f_m'\|_\infty + \|f_n'' - f_m''\|_\infty < \varepsilon$$

$\Rightarrow \|f_n^{(i)} - f_m^{(i)}\|_\infty < \varepsilon \quad (i = 0,1,2)$ also die $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ sind CF bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Wissen: $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.

$f_n'' \in C[0,1] \Rightarrow \exists g \in C[0,1]$ sodass $\lim_n \|f_n'' - g\|_\infty = 0$.

Wegen $f_n'' - g \in C[0,1]$ ist diese Fkt. integrierbar und für eine beliebige Stammfk. G von g gilt

$$\big| |f_n'(x) - f_n'(0)| - |G(x) - G(0)| \big| \leq |(f_n' - G)(x) - (f_n' - G)(0)|$$

$$= \left| \int_0^x (f_n'' - g)\, d\lambda \right| \leq \int_0^x |f_n'' - g|\, d\lambda \leq \|f_n'' - g\|_\infty \to 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

Es gilt also $\lim_n [f_n'(x) - f_n'(0)] = G(x) - G(0)$

$$\Leftrightarrow \lim_n f_n'(x) = G(x) - G(0) + \underbrace{\lim_n f_n'(0)}_{\exists,\ \text{da } f_n' \text{ CF} \in C[0,1]} =: h(x) \qquad (\text{Limes gleichmäßig!})$$

Analog erhält man (H ist Stammfkt. von h): $\lim_n [f_n(x) - f_n(0)] = H(x) - H(0)$

$$\Leftrightarrow \lim_n f_n(x) = H(x) - H(0) + \lim_n f_n(0) =: f(x) \qquad (\text{——}\ ,\ \text{——})$$

Lt. Konstr. gilt $f \in C^2[0,1]$ sowie $\|f_n - f\|_1 = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{0} + \underbrace{\|f_n' - f'\|_\infty}_{0} + \underbrace{\|f_n'' - f''\|_\infty}_{0} \to 0$.

Damit sind auch die beiden anderen $(X, \|\cdot\|_i)$ Banachräume, denn

sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF bzgl. $\|\cdot\|_i$ $(i=2,3)$ ~~und $f\in C^2[0,1]$~~ d.h.

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \ \|f_n-f_m\|_i<\varepsilon \quad \forall n,m\geq N$

$\|\cdot\|_i \sim \|\cdot\|_1 \Rightarrow \exists D_i: \ \|f_n-f_m\|_1 \leq D_i\|f_n-f_m\|_i < D_i\varepsilon \quad \forall n,m\geq N.$

d.h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist CF bzgl. $\|\cdot\|_1 \Rightarrow \exists f\in C^2[0,1]$ mit $\lim_n \|f_n-f\|_1=0$

$\Rightarrow \|f_n-f\|_i \leq \frac{1}{D_i}\|f_n-f\|_1 \to 0.$

4. $X=\{f:[0,1]\to\mathbb{C} \mid f(t)=\sum_{j=0}^{n} a_n t^j\}$

<u>ZZ:</u> $((C^2[0,1], \|\cdot\|_1), id)$ ist Vervollst. von $(X, \|\cdot\|_\infty)$

•) $(C^2[0,1], \|\cdot\|_1)$ ist vollständig lt. 3.

•) $id: \underset{\|\cdot\|_1}{X} \to \underset{\|\cdot\|_1}{C^2[0,1]}$ ist isom. und linear ✓

•) $\overline{X}^{\|\cdot\|_1}=C^2[0,1]$

„$\subseteq$" $\left.\begin{array}{l} X\subseteq C^2[0,1] \\ C^2[0,1] \text{ vollst. d.h. abgeschlossen bzgl. } \|\cdot\|_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X}\subseteq C^2[0,1]$

„$\supseteq$" Sei $f\in C^2[0,1]$ fest. $\Rightarrow f''\in C[0,1]$ und lt. Stone-Weierstraß

$\exists (g_n)_{n\in\mathbb{N}}, g_n\in X \ \forall n$ sodass $\lim_n \|f''-g_n\|_\infty=0.$

Sei $P_n (\in X)$ eine Stammfkt. von g_n mit $P_n(0)=0 \ \forall n.$

$\Rightarrow \big||f'(x)-f'(0)|-|P_n(x)|\big| \leq |(f'-P_n)(x)-f'(0)|$

$\leq \int_0^x |f''-g_n|\,d\lambda \leq \|f''-g_n\|_\infty \quad \forall x\in[0,1]$

d.h. $\lim_n P_n = f'-f'(0) \Leftrightarrow \lim_n [\underbrace{P_n-f'(0)}_{= q_n}] = f'$ glm.

Analog gilt mit Q_n als Stammfkt. von q_n wobei $Q_n(0)=0 \ \forall n$

$\lim_n [\underbrace{Q_n-f(0)}_{= s_n}] = f$ glm.

Lt Konstr. gilt $s_n\in X \ \forall n$ sowie

$\|f-s_n\|_1 = \underbrace{\|f-s_n\|_\infty}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\|f'-\overset{= q_n}{s_n'}\|_\infty}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\|f''-\overset{= g_n}{s_n''}\|_\infty}_{\downarrow\, 0} \to 0 \quad \Rightarrow C^2[0,1]\subseteq\overline{X}.$

5. $(X, \|\cdot\|)$ norm. Raum, $Y \subseteq X$ dichter TR.

Sei $r > 0$, $x \in Y$. Def.: $U_r^X(x) := \{y \in X : \|x-y\| < r\}$, $U_r^Y(x) := \{y \in Y : \|x-y\| < r\}$

$K_r^X(x) := \{ \text{—— " ——} \leq r\}$, $K_r^Y(x) := \{ \text{—— " ——} \leq r\}$

<u>ZZ:</u> $\overline{U_r^X(x)} = \overline{U_r^Y(x)} = \overline{K_r^Y(x)} = K_r^X(x)$ (Abschlüsse im X-Raum)

~~Es gelten trivialerweise~~ $\cancel{U_r^Y(x) \subseteq U_r^X(x) \Rightarrow \overline{U_r^Y(x)} \subseteq \overline{U_r^X(x)}}$

Es gilt $U_r^Y(x) \subseteq K_r^Y(x) \subseteq K_r^X(x) \Rightarrow \overline{U_r^Y(x)} \subseteq \overline{K_r^Y(x)} \overset{\text{abgeschl.}}{\subseteq} K_r^X(x)$.

(i) <u>ZZ:</u> $\overline{U_r^X(x)} \subseteq \overline{U_r^Y(x)}$

Sei $y \in U_r^X(x)$. Y dicht in $X \Rightarrow \exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, y_n \in Y \ \forall n$ mit $\lim_n \|y_n - y\| = 0$.

$U_r^X(x)$ ist offen, d.h. $\exists N \in \mathbb{N}$: $y_n \in U_r^X(x) \cap Y = U_r^Y(x) \quad \forall n > N$

$\Rightarrow \lim_n y_n = y \in \overline{U_r^Y(x)} \Rightarrow U_r^X(x) \subseteq \overline{U_r^Y(x)} \Rightarrow \overline{U_r^X(x)} \subseteq \overline{U_r^Y(x)}$.

(ii) <u>ZZ:</u> $K_r^X(x) \subseteq \overline{U_r^X(x)}$

Sei $y \in K_r^X(x)$.

1\. F.: $\|x-y\| < r \Rightarrow y \in U_r^X(x) \subseteq \overline{U_r^X(x)}$

2\. F.: $\|x-y\| = r$. Zeige $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, y_n \in U_r^X(x)$: $\lim_n \|y_n - y\| = 0$.

$$r > \frac{n}{n+1}\|x-y\| = \left\|\frac{n}{n+1}x - \frac{n}{n+1}y\right\|$$

$$= \left\|x - \frac{1}{n+1}x - \frac{n}{n+1}y\right\| = \Big\|x - \underbrace{\tfrac{1}{n+1}(x+ny)}_{= y_n}\Big\|$$

$$\Rightarrow y_n \in U_r^X(x) \text{ und } \|y_n - y\| = \left\|\frac{1}{n+1}(x+ny) - y\right\| = \left\|\frac{x}{n+1} - \frac{y}{n+1}\right\|$$

$$= \frac{1}{n+1}\underbrace{\|x-y\|}_{r} \to 0.$$

6\. Sei $p \in [1,\infty]$, $J \neq \emptyset$, $(X_j, \|\cdot\|_j)$ normierter Raum $\forall j \in J$.

$X := \{(x_j)_{j\in J} : x_j \in X_j \ \forall j \in J, \sum_J \|x_j\|_j^p < \infty\}$ $(p < \infty)$

$X := \{ \text{—— " ——}, \sup_{j\in J} \|x_j\|_j < \infty\}$ $(p = \infty)$

$\|(x_j)_{j\in J}\| := \left(\sum_J \|x_j\|_j^p\right)^{\frac{1}{p}}$ bzw. $\|(x_j)_{j\in J}\| := \sup_J \|x_j\|_j$.

<u>ZZ:</u> $(X, \|\cdot\|)$ ist normierter Raum.

<u>$p < \infty$:</u> ∘) $\|(x_j)_{j\in J}\| = 0 \Leftrightarrow \sum_J \|x_j\|_j^p = 0 \Leftrightarrow \|x_j\|_j = 0 \ \forall j \Leftrightarrow x_j = 0 \ \forall j \Leftrightarrow (x_j)_{j\in J} = 0$.

∘) $\|\alpha (x_j)_{j\in J}\| = \|(\alpha x_j)_{j\in J}\| = \Big(\sum_J \underbrace{\|\alpha x_j\|_j^p}_{= |\alpha|^p \|x_j\|_j^p}\Big)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \, \|(x_j)_{j\in J}\|$.

•) Sei $K \subseteq J$ endlich. Mit $f := \sum_{j\in K} \|x_j\|_j \, 1\!\!1_{\{j\}}$ gilt $\int_K f \, d\overset{\substack{\text{Zählmaß}\\ \downarrow}}{\zeta} = \sum_{j\in K} \|x_j\|_j$.

Lt. Def.: $(x_j)_{j\in K} \in X \Rightarrow f \in L^r(K,\zeta)$.

Minkowski-Ungl.:

$$\left(\sum_{j\in K} (\|x_j\|_j + \|y_j\|_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_K |f+g|^r d\zeta\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\leq \left(\int_K |f|^r d\zeta\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_K |g|^r d\zeta\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$= \left(\sum_{j\in K} \|x_j\|_j^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{j\in K} \|y_j\|_j^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Die Beziehung gilt für alle $K \subseteq J$ endl., insbes. für die Suprema.

$$\Rightarrow \|(x_j)_{j\in J} + (y_j)_{j\in J}\| = \|(x_j+y_j)_{j\in J}\| = \left(\sum_J \|x_j+y_j\|_j^r\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\leq \left(\sum_J (\|x_j\|_j + \|y_j\|_j)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_J \|x_j\|_j^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_J \|y_j\|_j^r\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$= \|(x_j)_{j\in J}\| + \|(y_j)_{j\in J}\|$$

$\underline{r=\infty}$: •) $\|(x_j)_{j\in J}\| = \sup_J \|x_j\|_j = 0 \Leftrightarrow x_j = 0 \ \forall j \Leftrightarrow (x_j)_{j\in J} = 0$

•) $\|\alpha (x_j)_{j\in J}\| = \sup_J \|\alpha x_j\|_j = |\alpha| \sup_J \|x_j\|_j = |\alpha| \, \|(x_j)_{j\in J}\|$

•) $\|(x_j)_{j\in J} + (y_j)_{j\in J}\| = \sup_J \|x_j+y_j\|_j \leq \sup_J (\|x_j\|_j + \|y_j\|_j)$
$$\leq \|(x_j)_{j\in J}\| + \|(y_j)_{j\in J}\|.$$

7. $\underline{ZZ}$: $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig g.d.w. $(X_j, \|\cdot\|_j)$ vollständig $\forall j \in J$.

Sei $(x_j^n)_{j\in J, n\in\mathbb{N}}$ CF in X bzgl. $\|\cdot\|$.

8. Sei J endlich.

(i) <u>ZZ:</u> Der Raum X hängt nicht von p ab.

$$\left.\begin{array}{ll} p < \infty: & \sum_J \|x_j\|_j^p < \infty \quad \forall x_j \in X_j \\ p = \infty: & \sup_J \|x_j\|_j = \max_J \|x_j\|_j < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow X = \prod_J X_j$$

(ii) ~~B~~ <u>ZZ:</u> Die Normen $\|\cdot\|$ auf X sind für versch. p paarweise äquivalent.

Sei $p \in [1,\infty)$. Es gilt offenbar

$$\|(x_j)_{j\in J}\|_\infty^p \leq \sum_J \|x_j\|_j^p \leq |J| \cdot \|(x_j)_{j\in J}\|_\infty^p \quad \Rightarrow \quad \|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_\infty$$

Damit gilt auch für $p,q \in [1,\infty)$ $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$, denn

$$\|\cdot\|_p \leq |J|^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_\infty \leq |J|^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_q \leq |J|^{\frac{2}{p}} \|\cdot\|_\infty \leq |J|^{\frac{2}{p}} \cdot \|\cdot\|_p .$$

7. $\underline{ZZ}$: $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig $\Leftrightarrow$ $(X_j, \|\cdot\|_j)$ vollständig $\forall j \in J$.

„$\Rightarrow$" Sei $j_0 \in J$ und $(x_{j_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CF in $(X_{j_0}, \|\cdot\|_{j_0})$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \|x_{j_0}^n - x_{j_0}^m\|_{j_0} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Def. Folge: $$(x_j^n)_{j\in J, n\in\mathbb{N}} := \begin{cases} (x_j^n)_{n\in\mathbb{N}} & j = j_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in X^{\mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow \|(x_j^n)_{j\in J} - (x_j^m)_{j\in J}\| = \left(\sum_{j\in J} \|x_j^n - x_j^m\|_j^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_{j_0}^n - x_{j_0}^m\|_{j_0} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Also ist $(x_j^n)_{j\in J, n\in\mathbb{N}}$ CF in $(X, \|\cdot\|)$.

Lt. VS $\exists (x_j)_{j\in J} \in X$: $\quad 0 = \lim_n \|(x_j^n)_{j\in J} - (x_j)_{j\in J}\| = \lim_n \|x_{j_0}^n - x_{j_0}\|_{j_0}$

d.h. $(X_{j_0}, \|\cdot\|_{j_0})$ ist vollständig.

„$\Leftarrow$" $\underline{p \in [1,\infty)}$: Sei $(x_j^n)_{j\in J, n\in\mathbb{N}}$ CF in $(X, \|\cdot\|)$, d.h. sei $\varepsilon > 0$ dann

$$\exists N \in \mathbb{N}: \quad \|(x_j^n)_{j\in J} - (x_j^m)_{j\in J}\|^p < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

$$\Rightarrow \sum_{j\in K} \|x_j^n - x_j^m\|_j^p < \varepsilon \quad \forall K \subseteq J \text{ endlich}, \ \forall n, m \geq N.$$

Insb. bilden die $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF in $(X_j, \|\cdot\|_j)$ $\rightarrow \exists x_j \in X_j$: $\lim_n \|x_j^n - x_j\|_j^p = 0$

$$\Rightarrow \varepsilon \geq \lim_m \sum_{j\in K} \|x_j^n - x_j^m\|_j^p = \sum_{j\in K} \lim_m \|x_j^n - x_j^m\|_j^p = \sum_{j\in K} \|x_j^n - x_j\|_j^p \quad \forall K \subseteq J \text{ endlich}, \ \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \sup_{K\subseteq J \text{ endl.}} \sum_{j\in K} \|x_j^n - x_j\|_j^p = \|(x_j^n)_{j\in J} - (x_j)_{j\in J}\|^p \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Noch $\underline{ZZ}$: $(x_j)_{j\in J} \in X$.

$$\|(x_j)_{j\in J}\| \leq \underbrace{\|(x_j)_{j\in J} - (x_j^N)_{j\in J}\|}_{\leq \varepsilon \text{ für } N \text{ passend}} + \underbrace{\|(x_j^N)_{j\in J}\|}_{<\infty} < \infty$$

$\underline{p = \infty}$:

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$: $\sup_{j\in J} \|x_j^n - x_j^m\|_j < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$

$$\Rightarrow \|x_j^n - x_j^m\|_j < \varepsilon \quad \forall j \in J \quad \overset{\forall j\in J}{\Rightarrow} \exists x_j \in X_j: \ \lim_n \|x_j^n - x_j\|_j = 0$$

$$\Rightarrow \lim_m \|x_j^n - x_j^m\|_j = \|x_j^n - x_j\|_j \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{j\in J} \|x_j^n - x_j\|_j \leq \varepsilon$$

$(x_j)_{j\in J}$ zeigt man analog zu oben.