Übungen zu Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Lösungen 7. Übung

47.

$$\mathbf{P}[X \geq 0] = \int_{[X \geq 0]} 1 \, \mathrm{d}\mathbf{P}(x) \leq \int_{[X \geq 0]} e^{tX} \, \mathrm{d}\mathbf{P}(x) \leq \int e^{tX} \, \mathrm{d}\mathbf{P}(x) = \mathbb{E}e^{tX} = \Psi_X(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}[X \geq 0] \leq \Psi_X(t), \ \forall t > 0 \Rightarrow \mathbf{P}[X \geq 0] \leq \inf_{t>0} \{\Psi_X(t)\}$$

also ist für $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}[X \geq x] = \mathbf{P}[X - x \geq 0] \leq \inf_{t>0} \{\Psi_{X-x}(t)\} = \inf_{t>0} \left\{e^{-tx}\Psi_X(t)\right\}$$

weil

$$\Psi_{X-x}(t) = \mathbb{E}e^{t(X-x)} = e^{-tx}\mathbb{E}e^{tX} = e^{-tx}\Psi_X(t)$$

für $X \sim N(0,1)$ ist damit

$$\mathbf{P}[X \geq x] \leq \inf_{t>0} \{e^{\frac{t^2}{2} - tx}\} = e^{-\frac{x^2}{2}} \inf_{t>0} \{e^{\frac{(t-x)^2}{2}}\} = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

48.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}[X \leq x + h | X > x] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\mathbf{P}(\{X \leq x+h\} \cap \{X > x\})}{\mathbf{P}[X > x]}$$

$$= \frac{1}{1 - F(x)} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}[x < X \leq x + h] = \frac{1}{1 - F(x)} \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x)}{1 - F(x)} = H'(x)$$

Die Exponentialverteilung hat konstante Ausfallsrate, da dann

$$r(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - 1 + e^{-\lambda x}} = \lambda$$

Die stetige Gleichverteilung hat wachsende Ausfallsrate, da für $a \leq x \leq b$ gilt:

$$r(x) = \frac{\frac{1}{b-a}}{1 - \frac{x-a}{b-a}} = \frac{1}{b-x}$$

49.

50.

51. Sei X_n^i die Indikatorvariable, die anzeigt, ob das i-te Symbol ungleich dem davor ist. Also $X_n^1 = 1$ (man beginnt also immer mit einem Lauf) sowie für $i > 1$:

$$X_n^i := \begin{cases} 0 & \text{Symbole an der Stelle } i \text{ und } i-1 \text{ sind gleich} \\ 1 & \text{Symbole an der Stelle } i \text{ und } i-1 \text{ sind verschieden} \end{cases}$$

Damit ist $X_n = X_n^1 + \ldots X_n^n$ und da $\mathbb{E}X_n^1 = 1$ sowie $\mathbb{E}X_n^i = \frac{1}{2},\ i > 1$ ist

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_n^i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_n^i = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

52. Unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes erhält man:

$$\psi(t) = \mathbb{E}t^X = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x}(tp)^x(1-p)^{n-x} = (tp + (1-p))^n$$

$$\Rightarrow \psi'(t) = np(tp + (1-p))^{n-1} \Rightarrow \psi'(1) = np$$

53. Mit $t := (t_1, t_2, \ldots, t_n)^T$:

$$\Psi(t) = \mathbb{E}t_1^{X_1} \ldots t_n^{X_n} = \sum_{i_1+\ldots+i_n=N} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}\, \mathbf{P}[X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n]$$

$$= \sum_{i_1+\ldots+i_n=N} \frac{N!}{i_1! \cdots i_n!}(p_1t_1)^{i_1} \cdots (p_nt_n)^{i_n} = (p_1t_1 + \ldots + p_nt_n)^N$$

wobei im letzten Schritt der polynomische Lehrsatz zur Anwendung kommt.

54.

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=0}^\infty i\,\mathbf{P}[X = i] = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^i \mathbf{P}[X = i] = \sum_{i=0}^\infty \sum_{j=i}^\infty \mathbf{P}[X = j]$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \mathbf{P}[X \geq i]$$

Unter Verwendung der Identität $n^2 = \sum_{k=1}^n 2k - 1$ erhält man

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{i=0}^\infty i^2\,\mathbf{P}[X = i] = \sum_{i=1}^\infty (\sum_{j=1}^i (2j-1))\,\mathbf{P}[X = i]$$

$$= \sum_{i=1}^\infty (2i-1) \sum_{j=i}^\infty \mathbf{P}[X = j] = \sum_{i=1}^\infty (2i-1)\,\mathbf{P}[X \geq i]$$