Übungen zu Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Lösungen 5. Übung

31. (i) $F^{-1}(y) \leq x \Leftrightarrow \inf\{\tilde{x} \,|\, F(\tilde{x}) \geq y\} \leq x \Leftrightarrow y \leq F(x)$

    (ii) $F(F^{-1}(y)) = F(\inf\{x \,|\, F(x) \geq y\}) \geq y$
    sowie
    $F^{-1}(F(x)) = \inf\{\tilde{x} \,|\, F(\tilde{x}) \geq F(x)\} \leq x$

    (iii) F stetig und monoton $\Rightarrow$ (Zwischenwertsatz) $\forall\, y\, \exists^{\times}\, x$ mit $x = F^{-1}(y) \Rightarrow F(F^{-1}(y)) = F(x) = y$

32. $\liminf_{n\to\infty} X_n = \sup_{k\in\mathbb{N}}(\inf_{n\geq k} X_n)$.

    Satz 3.7: $\inf_{n\geq 1} X_n$ und $\sup_{n\geq 1} X_n$ sind stochastische Größen $\Rightarrow \inf_{n\geq k} X_n =: \tilde{X}_k$ ist stochastische Größe.

    $\tilde{X}_k$ ist Folge von stochastischen Größen $\Rightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}} \tilde{X}_k$ ist stochastische Größe.

    Analog für $\limsup_{n\to\infty} X_n = \inf_{k\in\mathbb{N}}(\sup_{n\geq k} X_n)$.

33. Die Dichte von R ist $f_R(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0$, die Verteilungsfunkion $F_R(x) = 1 - e^{\lambda x},\ x > 0$. Nach (3.2) ist also die Verteilungsfunktion von X gleich

$$F_X(y) = \boldsymbol{P}(e^R \leq y) = \boldsymbol{P}(R \leq \ln y) = F_R(\ln y) = 1 - e^{-\lambda \ln y} = 1 - y^{-\lambda},\ y > 1$$

    Die Dichte berechnet sich als die Ableitung dieser Verteilung bzw. wie im Skriptum mit der Substitutionsregel zu $f_X(y) = \lambda y^{-\lambda-1},\ y > 1$.

    Die Quantilsfunktion ist (da F_X stetig und streng monoton) die Umkehrfunktion

$$F_X^{-1}(y) = \sqrt[\lambda]{\frac{1}{1-y}},\ 0 < y < 1$$

34. Der Bildbereich von Y ist $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (also abzählbar), daher ist für $n \geq 0$:

$$\boldsymbol{P}[Y = n] = \int_{Y^{-1}(\{n\})} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[n,n+1)} f(x) = F(n+1) + F(n)$$
$$= 1 - e^{-\lambda(n+1)} - 1 + e^{-\lambda n} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$$

35. Da F stetig ist, ist nach Beispiel 31 und (3.2)

$$F_Y(y) = \boldsymbol{P}(Y \le y) = \boldsymbol{P}(F(X) \le y) = \boldsymbol{P}(X \le F^{-1}(y)) = F_X(F^{-1}(y)) = y,\ 0 < y < 1$$

d.h. stetige Gleichverteilung: $Y \sim U_{0,1}$.

36. i)

$$\frac{\binom{A}{i}\binom{N-A}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{A!}{i!(A-i)!}\frac{(N-A)!}{(n-i)!(N-A-n+i)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{n!(N-n)!A!(N-A)!}{i!(A-i)!(n-i)!(N-A-n+i)!N!}$$

$$= \frac{\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(N-n)!}{(A-i)!(N-n-A+i)!}}{\frac{N!}{A!(N-A)!}} = \frac{\binom{n}{i}\binom{N-n}{A-i}}{\binom{N}{A}}$$

ii)

$$P[X=k] = \frac{\binom{A}{m-1}\binom{N-A}{k-m}}{\binom{N}{k-1}}\frac{A-m+1}{N-k+1} = \frac{\binom{k-1}{m-1}\binom{N-k+1}{A-m+1}}{\binom{N}{A}}\frac{A-m+1}{N-k+1}$$

$$= \frac{\binom{k-1}{m-1}\binom{N-k}{A-m}}{\binom{N}{A}}$$

da

$$\frac{(N-k+1)!}{(A-m+1)!(N-A-k+m)!}\frac{A-m+1}{N-k+1} = \binom{N-k}{A-m}$$

37.

$$|X-\mu| > k \Leftrightarrow -k > X-\mu > k \Leftrightarrow \mu + k\sigma < X < \mu - k\sigma$$

$$\boldsymbol{P}[|X-\mu| > k\sigma] = \boldsymbol{P}[X > \mu + k\sigma] + \boldsymbol{P}[X < \mu - k\sigma] = 1 - F(\mu + k\sigma) + F(\mu - k\sigma)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\mu + k\sigma - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu - k\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(k) + \Phi(-k) = 2(1-\Phi(k))$$

also ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}[|X-\mu| > 1\sigma] &= 2(1-0.8413) = 0.3174 \\
\boldsymbol{P}[|X-\mu| > 2\sigma] &= 2(1-0.9772) = 0.0456 \\
\boldsymbol{P}[|X-\mu| > 3\sigma] &= 2(1-0.9987) = 0.0026
\end{aligned}$$

38. a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2ax\,\mathrm{d}x + a\int_1^3 (3-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2a\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + a\left(3\int_1^3 \mathrm{d}x - \int_1^3 x\,\mathrm{d}x\right) = a\left(x\Big|_0^1\right) + a\left(3x - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3\right) = 3a = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

b) Die Verteilungsfunktion ist also

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{3}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6}x^2 + x - \frac{1}{2} & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

also ist $\boldsymbol{P}(0.5 < X < 2) = F(2) - F(0.5) = \frac{5}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$ sowie $\boldsymbol{P}(X < 2) = F(2) = \frac{5}{6}$

c)

$$\boldsymbol{P}(X < 0.5 | X < 1) = \frac{\boldsymbol{P}(X < 0.5 \cap X < 1)}{\boldsymbol{P}(X < 1)} = \frac{\boldsymbol{P}(X < 0.5)}{\boldsymbol{P}(X < 1)} = \frac{F(0.5)}{F(1^-)} = \frac{1}{12} \cdot 3 = \frac{1}{4}$$

wobei $F(1^-) = \lim_{\xi \to 1^-} F(\xi)$ (hier gleich $F(1)$, da F an 1 stetig)