Übungen zu Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Lösungen 4. Übung

23. •

$$g^{-1}\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) = \left\{x \in \Omega_1 \,\middle|\, g(x) \in \bigcup_{i\in J} A_i\right\} = \{x \in \Omega_1 | \exists\, i \in J : g(x) \in A_i\}$$
$$= \bigcup_{i\in J} \left\{x \in \Omega_1 \,\big|\, g(x) \in A_i\right\} = \bigcup_{i\in J} g^{-1}(A_i)$$

•

$$\begin{aligned} g^{-1}(A_1 \setminus A_2) &= \left\{x \in \Omega_1 \,\big|\, g(x) \in A_1 \wedge g(x) \notin A_2\right\} \\ &= \left\{x \in \Omega_1 \,\big|\, g(x) \in A_1\right\} \cap \left\{x \in \Omega_1 \,\big|\, g(x) \notin A_2\right\} \\ &= g^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2)^c = g^{-1}(A_1) \setminus g^{-1}(A_2) \end{aligned}$$

24. • **Poissonverteilung**:

$$p_{k-1} < p_k \Leftrightarrow \qquad \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} < \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad \Leftrightarrow k < \lambda$$
$$p_k > p_{k+1} \Leftrightarrow \qquad \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} > \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda} \qquad \Leftrightarrow k > \lambda - 1$$
$$\Rightarrow \lambda - 1 \leq k* \leq \lambda$$

• **Binomialverteilung**:

$$\begin{aligned} p_{k-1} < p_k &\Leftrightarrow \binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} < \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &\Leftrightarrow k(1-p) < p(n-k+1) \Leftrightarrow k < (n+1)p \\ p_k > p_{k+1} &\Leftrightarrow \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} > \binom{n}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} \\ &\Leftrightarrow (k+1)(1-p) > (n-k)p \Leftrightarrow k > (n+1)p - 1 \\ &\Rightarrow (n+1)p - 1 \leq k* \leq (n+1)p \end{aligned}$$

25.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_\mu(X = 2n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n}}{(2n)!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{2n}}{(2n)!} = e^{-\mu} \cosh \mu$$
$$= e^{-\mu} \frac{e^{\mu} + e^{-\mu}}{2} = \frac{1 + e^{-2\mu}}{2}$$

26. Hypergeometrische Verteilung

$$P(i = k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{39}{6-k}}{\binom{45}{6}}$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit in Österreich einen Sechser zu haben ist $\binom{45}{6}^{-1} \approx 0.000012\%$ in Deutschland $\binom{49}{6}^{-1} \approx 0.000007\%$.

27.

$$F(k) = P_\lambda(X \leq k) = \sum_{n=0}^{k} p_n(\lambda) = 1 - 1 + \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1 - \int_0^\lambda \frac{x^k}{k!} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

wobei man die letzte Gleichheit mit k-facher partieller Integration zeigt:

$$\int_0^\lambda \frac{x^k}{k!} e^{-x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} f'(x) = e^{-x} \\ g(x) = \frac{x^k}{k!} \end{array} \right| = \left(-\frac{x^k}{k!} e^{-x} \right) \Big|_0^\lambda + \int_0^\lambda \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \cdots = -\sum_{n=1}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + \int_0^\lambda e^{-x} \, \mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} + 1$$

28. Da es Zahlen gibt, die in keiner, je einer, je zwei, sowie allen drei der Mengen G, P, F liegen (ausser $(G \cap P) \setminus F$) ist das Bild $X_1(\mathbb{N}) = \{0, 2, 5, 10, 12, 15, 17\}$ und die Urbilder der einpunktigen Teilmengen der Bildmenge (in der Reihenfolge) sind

$$\begin{gathered} (G \cup P \cup F)^c, \\ G \setminus (P \cup F),\ P \setminus (G \cup F), F \setminus (G \cup P), \\ (G \cap F) \setminus P,\ (P \cap F) \setminus G, \\ G \cap P \cap F \end{gathered} \tag{1}$$

Borelmengen, die mehrere einpunktige Teilmengen enthalten, sind entsprechende Vereinigungen. Nun lassen sich die Mengen (1) offensichtlich alle aus G, P und F erzeugen, und umgekehrt werden G, P und F von diesen erzeugt, also ist $\sigma(X_1) = \sigma(\{G, P, F\})$.

$X_2(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2, 3\}$, definiere

$$\begin{aligned} A &:= X_2^{-1}(\{1\}) = (G \setminus (P \cup F)) \cup (P \setminus (G \cup F)) \cup (F \setminus (G \cup P)) \\ B &:= X_2^{-1}(\{2\}) = ((G \cap P) \setminus F) \cup ((G \cap F) \setminus P) \cup ((P \cap F) \setminus G) \\ C &:= X_2^{-1}(\{3\}) = G \cap P \cap F \end{aligned}$$

also ist $\sigma(X_2) = \sigma(\{A, B, C\})$ und da die Mengen A, B, C von G, P, F erzeugt werden, ist $\sigma(X_2) \subseteq \sigma(X_1)$.

Sei nun

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 3 & x = 17 \\ 2 & x = 12, 15 \\ 1 & x = 2, 5, 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann ist $X_2 = H \circ X_1$ und natürlich ist H messbar, da als Urbilder nur endliche Vereinigungen von einpunktigen Mengen und deren Komplemente auftreten.

29. Ist $\theta = 1$ so ist nichts zu zeigen. Sei also $\theta < 1$, zuerst einmal ist dann

$$P[X > s] = 1 - P[X \leq s] = 1 - (1 - (1 - \theta)^s) = (1 - \theta)^s$$

und weiter

$$P[X > s + t | X > t] = \frac{P[X > s + t \cap X > t]}{P[X > t]} = \frac{P[X > s + t]}{P[X > t]} = P[X > s]$$

da $(1 - \theta)^{s+t} = (1 - \theta)^s (1 - \theta)^t$.

30. Nach Satz 3.2 genügt es, die Meßbarkeit auf einem Erzeuger zu zeigen. Wähle als Erzeuger $\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Ist $f^{-1}([a, \infty)) = \emptyset$, ist man fertig, sonst, wenn f monoton wachsend ist, setze $b := \inf \left\{ f^{-1}(a, \infty) \right\}$ (verallgemeinterte Inverse), dann ist

- $f^{-1}([a, \infty)) = [b, \infty) \in \mathcal{B}$, wenn $f(b) \in [a, \infty)$
- $f^{-1}([a, \infty)) = (b, \infty) \in \mathcal{B}$, wenn $f(b) \notin [a, \infty)$

Ist f hingegen monoton fallend, setze $b := \sup \left\{ f^{-1}(a, \infty) \right\}$, dann ist

- $f^{-1}([a, \infty)) = (-\infty, b] \in \mathcal{B}$, wenn $f(b) \in [a, \infty)$
- $f^{-1}([a, \infty)) = (-\infty, b) \in \mathcal{B}$, wenn $f(b) \notin [a, \infty)$