2.4.09

Wahrscheinlichkeitsrechnung u. Statistik UE

III) 16) Wähle $k \le n$ beliebig, aber fest.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right]\setminus A_k\right) + P(A_k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\setminus A_k)\right) + P(A_k)$$

$$= P\left(\bigcup_{i:\, i\neq k}(A_i\setminus A_k)\right) + P(A_k) \le \left(\sum_{i:\, i\neq k} P(A_i\setminus A_k)\right) + P(A_k)$$

$$= \left(\sum_{i:\, i\neq k} P(A_i) - P(A_i\cap A_k)\right) + P(A_k) = \sum_{i}^{n} P(A_i) - \sum_{i:\, i\neq k} P(A_i\cap A_k)$$

stimmt $\forall k$, da bel. gewählt $\Rightarrow$ gilt speziell für jenes k mit $\min_k = \{\ldots\}$

19) (i) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-P(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c) < \infty \overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} P(\limsup_{n\to\infty} A_n^c) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_n^c\right)$

$$\overset{\text{de Morgan}}{=} \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_n\right)^c = 1 - P(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 0$$

$\Rightarrow P(\liminf_{n\to\infty} A_n) = 1$

(ii) analog.

20) E … „Blutgruppe passt"
$X \in \{A, B, AB, 0\}$ … Blutgruppe des Spenders

$P(E|A) = 0{,}45 \quad P(E|B) = 0{,}25 \quad P(E|AB) = 0{,}05 \quad P(E|0) = 1$

•) Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Person spenden kann?

$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|AB)P(AB) + P(E|0)P(0)$ (Satz d. vollst. Wahrscheinlichkeit)

$= 0{,}45\cdot 0{,}4 + 0{,}25\cdot 0{,}2 + 0{,}05\cdot 0{,}05 + 0{,}35\cdot 1 = 0{,}5825$

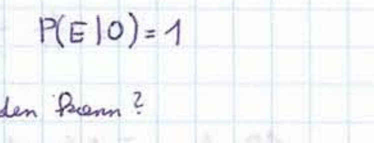
•) VS: Übertragung erfolgreich. Wie hoch ist WS, dass Opfer bzw. Spender Blutgruppe B hatten?

$P(B|E) = \frac{P(B\cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}2}{0{,}5825} \approx 0{,}0858$ (Spender hat B)

$\frac{0{,}55\cdot 0{,}2}{0{,}5825} \approx 0{,}1888$ (Opfer hat B)

21) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{Z})$ mit $\mathcal{Z} = \{[0,\frac14), [\frac14,\frac12), [\frac12,\frac34), [\frac34,1]\}$

$A := [0,\frac12]$, $B = [\frac14,\frac34)$, $C = [0,\frac14)\cup[\frac12,\frac34)$



•) $P(A\cap B) = P([\frac14,\frac12)) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(B)$

•) $P(A\cap C) = P([0,\frac14)) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(C)$

•) $P(B\cap C) = P([\frac12,\frac34)) = \frac14 = \frac12\cdot\frac12 = P(B)\cdot P(C)$

•) $P(A\cap B\cap C) \overset{P}{=} (\emptyset) = 0 \neq \frac18 = \frac12\cdot\frac12\cdot\frac12 = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

22) $\exists \binom{20}{6}$ versch. Prüfungen

·) $P(A \text{ besteht}) = \dfrac{\binom{12}{6} + \binom{12}{5}\binom{8}{1} + \binom{12}{4}\binom{8}{2}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}54$

·) E… 4 Fragen richtig

$$P(E|A) = \frac{\binom{12}{4}\binom{8}{2}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}3576$$

$$P(E|B) = \frac{\binom{7}{4}\binom{13}{2}}{\binom{20}{6}} \approx 0{,}07$$

$$\Rightarrow P(E) = P(E|A)\underset{\frac{1}{2}}{\underbrace{P(A)}} + P(E|B)\underset{\frac{1}{2}}{\underbrace{P(B)}} \approx 0{,}214$$

$$\Rightarrow P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} \approx 0{,}8354$$

17) E… zuerst ziehende Person gewinnt

H_i… i-ter Durchgang ⇒ disjunkt ⇒ Hypothesen

$$\Rightarrow P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E|H_i)\,P(H_i)$$

wobei $P(E|H_i) = \frac{1}{n}$, $P(H_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2(i-1)}$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2(i-1)} = \frac{1}{n}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2i} = \frac{1}{n}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\underbrace{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^2}_{<1}\Big)^i$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}} = \frac{n}{2n-1}$$ ⇒ nicht fair kleine n

18) A_n… Teilchenstr. zum ZP n

(i) beliebig lange ⇔ A_n tritt unendlich oft ein ⇔ $\limsup_{n\to\infty} A_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n < \infty \overset{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$$

(ii) A, N unabhängig ⇒ $P(A_n \cap N=n) = P(A_n)\cdot P(N=n)$ ($\hat{=}$ WS, dass zum ZP n Strahlung gemessen wird)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}\,\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2e}} - 1 = \frac{1}{2e-1} \approx 0{,}2254$$