10.12.09

Differentialgleichungen UE

VII, 180, 188, 195, 199, 203, 204, 208

180,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 (\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 2+i, \quad \lambda_4 = 2-i$

$$\ker(A - 3E) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A-3E) = 3$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t(2+i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{t(2-i)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tJ'} = \begin{pmatrix} Re\, e^{tJ} & -Im\, e^{tJ} \\ Im\, e^{tJ} & Re\, e^{tJ} \end{pmatrix} \text{ mit } Re\, e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t}\cos t \end{pmatrix}$$

$$Im\, e^{tJ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t}\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$

188) $\dot{x} = A \cdot x$, ges: reelle Lösungsbasis

<u>Bestimme T:</u>

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$:

$$\begin{array}{cccc|c|c} & & & & v_1 & v_2 \\ -3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$\lambda_3 = 2+i \quad \Rightarrow v_3 = (-23-10i,\ 2-8i,\ -11+27i,\ 17)^T$

$\lambda_4 = \overline{\lambda_3} \quad \Rightarrow v_4 = \overline{v_3}$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -23-10i & -23+10i \\ 0 & 0 & 2-8i & 2+8i \\ 0 & -1 & -11+27i & -11-27i \\ -1 & 0 & 17 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -23 & -23 & 0 & 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & -11 & -11 & 0 & 0 & -27 & 27 \\ -1 & 0 & 17 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -10 & 10 & 1 & 0 & -23 & -23 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 27 & -27 & 0 & -1 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 17 & 17 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T' e^{tJ'} = \left(\begin{array}{cccc|c} e^{3t} & te^{3t} & -23e^{2t}\cos t + 10e^{2t}\sin t & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 2e^{2t}\cos t + 8e^{2t}\sin t & & \\ 0 & -e^{3t} & -11e^{2t}\cos t - 27e^{2t}\sin t & & \\ 0 & -te^{3t} & 17e^{2t}\cos t & & \\ \hline 0 & 0 & -10e^{2t}\cos t - 23e^{2t}\sin t & & \\ 0 & 0 & -8e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\sin t & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 27e^{2t}\cos t - 11e^{2t}\sin t & & \\ 0 & 0 & 17e^{2t}\sin t & & \end{array}\right)$$

$\leadsto$ reelle Lösungsbasis: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \\ -t \end{pmatrix} e^{3t}, \begin{pmatrix} -23 \\ 2 \\ -11 \\ 17 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -27 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t,\ \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} -23 \\ 2 \\ -11 \\ 17 \end{pmatrix}\sin t$

195) $\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 13 & 1\\ -1 & 5 & 1\\ 13 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^{3t}\\ \sin 2t\\ e^{3t}\end{pmatrix}$

ges.: partikuläre Lösung mittels $\varphi_p(t) = T\cdot e^{tJ}\int e^{-tJ}\,T^{-1}\,b(t)\,dt$

$$T = \begin{pmatrix}1 & 10+2i & \\ 0 & 2i-1 & \cdot\\ 1 & 9-6i & \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}-24 & 156 & 44\\ 2-i & -8-i & -2+i\\ & \cdot & \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}\left(e^{3t}, e^{2t(1+i)}, e^{2t(1-i)}\right) \Rightarrow e^{-tJ} = \operatorname{diag}\left(e^{-3t}, e^{-2t(1+i)}, e^{-2t(1-i)}\right)$$

$$\int e^{-tJ}T^{-1}b(t)\,dt = \int \begin{pmatrix}e^{-3t} & & \\ & e^{-2t(1+i)} & \\ & & e^{-2t(1-i)}\end{pmatrix}\frac{1}{20}\underbrace{\begin{pmatrix}-24 & 156 & 44\\ 2-i & -8-i & -(2-i)\\ & \cdot & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{+3t}\\ \sin 2t\\ e^{+3t}\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}20e^{+3t}+156\sin 2t\\ -(8+i)\sin 2t\\ -(8-i)\sin 2t\end{pmatrix}}\,dt$$

$$= \int\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}dt + \frac{1}{20}\int\begin{pmatrix}e^{-3t} & & \\ & e^{-2t(1+i)} & \\ & & e^{-2t(1-i)}\end{pmatrix}\sin 2t\,dt\cdot\begin{pmatrix}156\\ -(8+i)\\ -(8-i)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{20}\int e^{-tJ}\sin 2t\,dt\begin{pmatrix}156\\ -(8+i)\\ -(8-i)\end{pmatrix}$$

$$\int e^{at}\sin bt\,dt = \frac{a}{a^2+b^2}e^{at}\sin bt - \frac{b}{a^2+b^2}e^{at}\cos bt$$

$$\Rightarrow M := \int e^{-tJ}\sin 2t\,dt = \operatorname{diag}\Big(\tfrac{1}{13}(-3\sin 2t - 2\cos 2t)\,e^{-3t},$$
$$\tfrac{1}{10}\left((-3+i)\sin 2t - (1-2i)\cos 2t\right)e^{-2t(1+i)},$$
$$\tfrac{1}{10}\left((-3-i)\sin 2t - (1+2i)\cos 2t\right)e^{-2t(1-i)}\Big)$$

$$\varphi_p(t) = Te^{tJ}\int e^{-tJ}T^{-1}b(t)\,dt = Te^{tJ}\begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{20}Te^{tJ}\cdot M\cdot\begin{pmatrix}156\\ -(8+i)\\ -(8-i)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}t e^{3t} + \frac{1}{20}\begin{pmatrix}16\\-3\\3\end{pmatrix}\sin 2t + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\-12\end{pmatrix}\cos 2t \qquad \text{(Maple)}$$

199) $\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&13&1\\-1&5&1\\3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t^2\\0\\\sin 2t\end{pmatrix}$

ges.: part. Lösung mittels Ansatzmethode

$$b(t) = (t^2, 0, \sin 2t)^T = \underbrace{(t^2,0,0)^T}_{=:b_1(t)} + \underbrace{(0,0,\sin 2t)^T}_{=:b_2(t)}$$

•) $\dot{x} = A\cdot x + b_1(t)$

0 ist nicht EW von A ⇒ Ansatz: $x = x_2 t^2 + x_1 t + x_0$
$y = y_2 t^2 + y_1 t + y_0$
$z = z_2 t^2 + z_1 t + z_0$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 2x_2 t + x_1 = 2x_2 t^2 + 2x_1 t + 2x_0 + 13y_2 t^2 + 13y_1 t + 13y_0 + z_2 t^2 + z_1 t + z_0 + t^2 \\ 2y_2 t + y_1 = -x_2 t^2 - x_1 t - x_0 + 5y_2 t^2 + 5y_1 t + 5y_0 + z_2 t^2 + z_1 t + z_0 \\ 2z_2 t + z_1 = 3x_2 t^2 + 3x_1 t + 3x_0 \end{cases} \Rightarrow z_2 = \frac{3}{2}x_1,\ z_1 = 3x_0,\ x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = t^2\left(13y_2 + \frac{3}{2}x_1 + 1\right) + t\left(2x_1 - 2x_2 + 13y_1 + 3x_0\right) + 13y_0 + z_0 - x_1 + 2x_0 \\ 0 = t^2\left(5y_2 + \frac{3}{2}x_1\right) + t\left(-2y_2 - x_1 + 5y_1 + 3x_0\right) + \left(-y_1 - x_0 + 5y_0 + z_0\right) \end{cases}$$

Koeffizientenvergleich: Grad 2: $y_2 = -\frac{1}{8}$, $x_1 = \frac{5}{12}$ ⇒ $z_2 = \frac{5}{8}$

Grad 1: $y_1 = -\frac{1}{8}$, $x_0 = \frac{19}{72}$ ⇒ $z_1 = \frac{19}{24}$

Grad 0: $y_0 = -\frac{1}{32}$, $z_0 = \frac{85}{288}$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = \frac{1}{288}\begin{pmatrix}120t + 76\\ 36t^2 - 36t - 9\\ 180t^2 + 228t + 85\end{pmatrix}$$

•) $\dot{x} = A\cdot x + b_2(t)$

$2i$ ist nicht EW von A ⇒ Ansatz: $x = \sigma_1 \sin 2t + \tau_1 \cos 2t$
$y = \sigma_2 \sin 2t + \tau_2 \cos 2t$
$z = \sigma_3 \sin 2t + \tau_3 \cos 2t$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 0 = (2\sigma_1 + 13\sigma_2 + \sigma_3 + 2\tau_1)\sin 2t + (2\tau_1 + 13\tau_2 + \tau_3 - 2\sigma_1)\cos 2t \\ 0 = (-\sigma_1 + 5\sigma_2 + \sigma_3 + 2\tau_2)\sin 2t + (-\tau_1 + 5\tau_2 + \tau_3 - 2\sigma_2)\cos 2t \\ 0 = (3\sigma_1 + 1 + 2\tau_3)\sin 2t + (3\tau_1 - 2\sigma_3)\cos 2t \end{cases} \Rightarrow \tau_3 = -\frac{3}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2},\ \sigma_3 = \frac{3}{2}\tau_1$$

Koeffizientenvergleich: $\tau_1 = -\frac{31}{130}$, $\tau_2 = \frac{1}{10}$, $\sigma_1 = \frac{6}{65}$, $\sigma_2 = \frac{1}{20}$ ⇒ $\tau_3 = -\frac{83}{130}$, $\sigma_3 = -\frac{93}{260}$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = \frac{1}{260}\begin{pmatrix}24 \sin 2t - 62\cos 2t\\ 13 \sin 2t + 26\cos 2t\\ -93 \sin 2t - 166\cos 2t\end{pmatrix}$$

203) $M\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0$ mit $M = \mathrm{diag}(m_1, \dots, m_k)$

Substitution: $\underset{\text{von } t \text{ unabh.}}{x = v \cdot e^{\lambda t}} \Rightarrow \dot{x} = \lambda v e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x} = \lambda^2 v e^{\lambda t}$

$$\rightsquigarrow M\lambda^2 v e^{\lambda t} + A\lambda v e^{\lambda t} + B v e^{\lambda t} = (M\lambda^2 + A\lambda + B) v e^{\lambda t} = 0$$

$$\Leftrightarrow (M\lambda^2 + A\lambda + B) v = 0$$

$$\Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(M\lambda^2 + A\lambda + B)$$

Die Substitution führt also auf ein homogenes LGS mit konstanten Koeffizienten. $\exists$ nichttriviale Lösung v $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda^2 M + \lambda A + B) = 0$. für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Wann erhält man dadurch eine Lösungsbasis?

äqu. System 1. Ordnung: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ M\dot{y} + Ay + Bx = 0 \end{cases} \overset{\text{VS: } M \text{ regulär}}{\Leftrightarrow} \dot{y} = -M^{-1}A\cancel{x}y - M^{-1}Bx$

$$\Leftrightarrow \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -M^{-1}B & -M^{-1}A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\exists$ Lösung der Gestalt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v e^{\lambda t} \text{ ist Lösg. d. Ausgangssystems} \\ y = \underbrace{\lambda v}_{w} e^{\lambda t} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Lösungsbasis $\Leftrightarrow$ Matrix diagonalisierbar.

Spezialfall $A = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -M^{-1}B \cdot x \end{cases} \Rightarrow \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \lambda \begin{pmatrix} v e^{\lambda t} \\ \lambda v e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -M^{-1}B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v e^{\lambda t} \\ \lambda v e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

$v e^{\lambda t}$ ist Lösung $\Leftrightarrow \lambda^2 v e^{\lambda t} = -M^{-1}B v e^{\lambda t}$

$\Leftrightarrow \mu := \lambda^2$ ist EW von $-M^{-1}B$

204) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -23 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda^2 M + \lambda A + B) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda - 8 & -\lambda + 1 \\ \lambda - 23 & 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 \end{vmatrix} = (-\lambda + 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda - 8 & 1 \\ \lambda - 23 & -2\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ für } \lambda = 1$$

$$\mathrm{Ker}(M + A + B) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -22 & 0 \end{pmatrix} = \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: v}\Big]$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

208) $x^{(3)}+\ddot{x}+\dot{x}+x=e^{-t}+4t$

ges.: allgemeine Lösung.

Char. Polynom der DGL: $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1 = 1+\lambda^2+\lambda(1+\lambda^2)$

$$= (1+\lambda)(1+\lambda^2)$$

$\Rightarrow$ EW: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=i,\ \lambda_3=-i$

$\Rightarrow$ <u>Lösungsbasis</u> (d. hom. DGL) über $\mathbb{C}$: $(e^{-t}, e^{it}, e^{-it})$

$\Rightarrow$ —— " —— über $\mathbb{R}$: $(e^{-t}, \cos t, \sin t)$

<u>partikuläre Lösung:</u>

•) $x^{(3)}+\ddot{x}+\dot{x}+x=e^{-t}$

Ansatz: $x=t^{\nu}\cdot q(t)e^{-t}$ mit $[q]\le[e^{-t}]=0,\ \nu=1$ (VF-Reil von $c:=-1$ als EW)

$x=t\cdot q\cdot e^{-t} \Rightarrow \dot{x}=qe^{-t}-tqe^{-t} \Rightarrow \ddot{x}=tqe^{-t}-2qe^{-t} \Rightarrow x^{(3)}=3qe^{-t}-tqe^{-t}$

Einsetzen $\rightsquigarrow$ $3qe^{-t}\cancel{-tqe^{-t}}-2qe^{-t}\cancel{+tqe^{-t}}+qe^{-t}\cancel{-tqe^{-t}}\cancel{+tqe^{-t}}=e^{-t}$

$$\Leftrightarrow\ 2qe^{-t}=e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow\ q=\tfrac{1}{2}$$

•) $x^{(3)}+\ddot{x}+\dot{x}+x=4t$

Ansatz: $x=p_0+p_1 t$

Einsetzen $\rightsquigarrow$ $p_1+p_0+p_1 t=4t \Rightarrow p_1=4,\ p_0=-4$

$\Rightarrow$ part. Lösung $x_p=-4+4t+\frac{t}{2}e^{-t}$

also allg. Lösung:

$$x=(e^{-t}, \cos t, \sin t)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}-4+4t+\frac{t}{2}e^{-t}$$