23.11.09

Differentialgleichungen UE

V) 128, 133, 139, 140, 145, 148, 152

128) ges.: DGL von $ax^2+by^2=1 \quad (a,b\in\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} ax^2+by^2=1 \\ 2ax+2byy'=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-\frac{byy'}{x} \end{cases} \qquad x\neq 0$$

Einsetzen $\rightsquigarrow -byy'x+by^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad -yy'x+y^2=\frac{1}{b} \qquad b\neq 0$

$$\begin{cases} -yy'x+y^2=\frac{1}{b} \\ -yy'-x(y')^2-xyy''+2yy'=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Gleichung der Schar: $x((y')^2+yy'')-yy'=0$.

Für $b=0 \Rightarrow a>0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{a} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow dx=0$.

133) $x^4+y^4=2xy$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=4x^3-2y=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=4y^3-2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2y^3 \end{cases}$$

Einsetzen $\rightsquigarrow 4(2y^3)^3-2y=32y^9-2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad y(16y^8-1)=0$

$\Leftrightarrow \quad y=0 \vee y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x=0 \qquad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

<u>singuläre Punkte:</u>

Sei $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^4+y^4=\frac{1}{2}\neq 1=2xy$.

$\Rightarrow$ singulären Punkt: $(0,0)$.

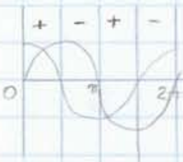
indefinit

Wegen $d^2F=\begin{pmatrix}12x^2 & -2\\ -2 & 12y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ in $(0,0)$ müssen die Tangentialvektoren (u,v) $d^2F(0,0)(u,v)(u,v)=0$ erfüllen.

$d^2F(0,0)(u,v)(u,v)=(u,v)\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=-2vu-2uv=0 \Leftrightarrow uv=0$

Setzt man nun (vgl. S.58) $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ $(r>0)$, so folgt:

$uv = r^2\cos\varphi\sin\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = k\frac{\pi}{2}$ mit VZ-Wechsel an jeder Nullstelle.



$\Rightarrow$ Tangentialvektoren $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$

139) ges.: Tangentialvektoren an singulären Stellen.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^4 = 0 \\ xy + xz = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dg}{d(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -4z^3 \\ y+z & x & x \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist < 2 an $(0, a, -a)$.

Einsetzen dieser Punkte liefert:

$$\begin{cases} a^2 - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2(1-a^2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \lor a = \pm 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ singuläre Punkte: $(0,0,0)$, $(0,1,-1)$, $(0,-1,1)$.

An $(0,0,0)$ ist $dg = 0$.

$$\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 g_1}{\partial z^2} = -12z^2$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial x} = 1$$

$$\Rightarrow d^2g(0,0,0)(v)(v) = \begin{pmatrix} 2v_1^2 + 2v_2^2 \\ 2v_1v_2 + 2v_1v_3 \end{pmatrix} = \cancel{0} \Leftrightarrow v = (0,0,v_3)$$

~~d^2g ist für g_1 positiv definit $\Rightarrow$ $(0,0,0)$ ist isolierter Punkt.~~

An $(0,\pm 1,\mp 1)$ gilt

$$dg(0,\pm1,\mp1)(v) = \begin{pmatrix} \pm 2v_2 \pm 4v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = (v_1, -2v_3, v_3)$$

Beide Male ist die Gestalt von v nur notwendig, aber nicht hinreichend.

140) $xy = (a-x+y)^2$ $\qquad a\in\mathbb{R},\ xy\geq 0$

DGL der Schar:

$$\begin{cases} xy-(a-x+y)^2=0 \qquad \iff a=\pm\sqrt{xy}+x-y \\ (y+2(a-x+y))\,dx+(x-2(a-x+y))\,dy=0\end{cases}$$

Einsetzen $\rightsquigarrow$ $(y\pm2\sqrt{xy})\,dx+(x\mp2\sqrt{xy})\,dy=0$

Einhüllende:

$$\begin{cases} xy=(a-x+y)^2 \\ 0=2(a-x+y) \qquad \iff a=x-y\end{cases}$$

Einsetzen $\rightsquigarrow$ $xy=(x-y-x+y)^2=0 \iff x=0 \vee y=0 \quad \Rightarrow y'=0$

$xy=0$ hat in $(0,0)$ keine eindeutig bestimmte Tangente

$\Rightarrow$ $(0,0)$ ist kein Punkt der Einhüllenden.

Die einzige Scharkurve durch $(0,0)$ tritt für $a=0$ auf:

$$xy-(0-x+y)^2 = x^2-3xy+y^2=0$$

$$\iff y=\frac{3x}{2}\pm\sqrt{\frac{9x^2}{4}-x^2}=\frac{3\pm\sqrt5}{2}x \quad\Rightarrow y'=\frac{3\pm\sqrt5}{2}$$

$\Rightarrow$ Eine Kombination von Scharkurven und Einhüllender ist in $(0,0)$ nicht diffbar fortsetzbar, aber $y=0$ ist $\forall x\in\mathbb{R}$ Lösung der DGL.

145) $y=xy'+y'^2$

Clairaut-DGL $\Rightarrow$ Geradenschar: $y=px+p^2 \qquad (p\in\mathbb{R})$

Einhüllende:

$$\begin{cases} px+p^2=y \\ x+2p=0 \end{cases} \quad\Rightarrow x=-2p \quad\Rightarrow y=-p^2$$

$\rightsquigarrow$ Gleichung der Einhüllenden: $y=-\left(\frac{x}{2}\right)^2$

allgemeine Lösung: Lösungsgeraden, Einhüllende und alle daraus zusammengesetzten diffbaren Kurven.

148) ges.: Lösungen durch $(1,1)$ bzw. $(1,-5)$

$$y = xy' + \sqrt{y'+4} \qquad y' \geq -4$$

Clairaut-DGL $\Rightarrow$ Geradenschar: $y = px + \sqrt{p+4} \qquad p \geq -4$

Einhüllende:

$$\begin{cases} y = px + \sqrt{p+4} \\ +x \pm \frac{1}{2\sqrt{p+4}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2\sqrt{p+4}} \Rightarrow y = \frac{p+8}{2\sqrt{p+4}} \qquad p > -4$$

Durchlaufung der Einhüllenden:

$$(x,y) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{p+4}}, \frac{p+8}{2\sqrt{p+4}}\right) \qquad p \in (-4, \infty) \qquad \text{bzw. explizit: } y = -\frac{1}{4x} - 4x \quad (x<0)$$

Lösungen durch $(1,1)$:

$$(x,y) = (1,1) \Rightarrow 1 = p + \sqrt{p+4}$$

Subst. $q^2 = p+4$, $q \geq 0$: $\quad 1 = q^2 - 4 + q \Leftrightarrow q^2 + q - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow q = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 5} = \frac{\sqrt{21} - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2} x + \sqrt{\frac{11 - \sqrt{21}}{2}} \quad \text{bzw.} \quad y_2 = \begin{cases} -\frac{1}{4x} - 4x & x < -\frac{1}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{21}}{2}+4}} = -\frac{\sqrt{21}+1}{20} \\ y_1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösungen durch $(1,-5)$:

$$(x,y) = (1,-5) \Rightarrow -5 = \underbrace{p + \sqrt{p+4}}_{\geq -4} \Rightarrow \nexists \text{ dort keine Lösungsgerade.}$$

Wegen ~~$y<0$~~ $y = \frac{p+8}{2\sqrt{p+4}} > 0$ kann auch die Einhüllende nicht durch $(1,-5)$ gehen.

Also: $\nexists$ keine Lösung.

152) $\begin{cases} t^2 \dot{x} = 3(t-1)x + t^2 y \\ t^2 \dot{y} = 3x + (t-t^2)y \end{cases}$

Polynomlösung:

Ansatz $x = a t^n$, $y = b t^k$:

$$\begin{cases} n a t^{n+1} = 3a t^{n+1} - 3a t^n + b t^{k+2} \\ k b t^{k+1} = 3a t^n + b t^{k+1} - b t^{k+2} \end{cases}$$

Vergleich der Grade $\rightsquigarrow n = k+2$

Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow k=1,\ b=3a$

$\Rightarrow$ Polynomlösung: $(x,y) = (t^3, 3t)$.

d'Alembert:

$\psi(t) = c(t)\varphi(t) + \tau(t)$ mit $\tau_1 = 0$.

$\Rightarrow \psi(t) = c(t)\cdot(t^3, 3t) + (0, \tau(t))$, d.h. $\begin{cases} x = c(t)\, t^3 \\ y = 3t\, c(t) + \tau(t) \end{cases}$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{cases} (\dot{c}(t)\, t^3 + \cancel{3c(t)t^2})\, \cancel{t^2} = \cancel{3t^4 c(t)} - \cancel{3c(t)t^3} + \cancel{3t^3 c(t)} + \cancel{t^2}\,\tau(t) \\ \cancel{3t^2 c(t)} + 3t^3 \dot{c}(t) + t^2 \dot{\tau}(t) = \cancel{3t^3 c(t)} + \cancel{3t^2 c(t)} - \cancel{3t^3 c(t)} + (t-t^2)\tau(t) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \begin{cases} t^2 \tau(t) = \dot{c}(t)\, t^5 \\ 3\tau(t) + t^2 \dot{\tau}(t) = (t-t^2)\tau(t) \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\dot{\tau}(t)}{\tau(t)} = \dfrac{t - t^2 - 3}{t^2} = \dfrac{1}{t} - 1 - \dfrac{3}{t^2}$ $\qquad t \neq 0$

$\Rightarrow \cancel{\tau(t)}\ \ln|\tau(t)| = \ln|t| - t + \frac{3}{t} \Leftrightarrow \tau(t) = t \cdot e^{-t+\frac{3}{t}}$

$\Rightarrow \dot{c}(t) = \dfrac{e^{-t+3/t}}{t^2} \Rightarrow c(t) := \displaystyle\int \frac{e^{-t+3/t}}{t^2}\, dt.$

also: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 & t^3 c(t) \\ 3t & 3t\,c(t) + t e^{-t+\frac{3}{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $\qquad t \neq 0$

~~AWP für $t_0 = 0$ nicht definiert~~.

~~Für $t=0$ gilt $\begin{cases} 0 = -3x \\ 0 = 3x \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$~~

~~also für $t_0 = 0$ nur ~~Lösung~~ $(x,y)(0) = (0,0)$ als AWP möglich~~

Für $t=0$ gilt: $\tau(0) = 0$, $\dot{c}(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow c(0) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x,y)(0) = (0,0)$ ist einziges AWP für $t_0 = 0$.