4P4 /M-161

1. Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x} = \frac{t + x - 3}{2t + x + 4}$$

(4 P.)

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$t^2(\ln t - 1)\ddot{x} - t\dot{x} + x = 0, \quad x(2) = 5, \ \dot{x}(2) = 6,$$

indem Sie zunächst eine Polynom–Lösung der Gleichung bestimmen und sodann die Ordnung reduzieren.

(6 P.)

3. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 3y - 2z \\ \dot{y} &= x - 2y + 4z \\ \dot{z} &= x - y - 2z \end{aligned}$$

(5 P.)

4. Untersuchen Sie die Stabilität der Null–Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (e^{2t}x - y)(x^2 + 2y^2 - 4) \\ \dot{y} &= (2x + 3e^{t}y)(x^2 + 2y^2 - 4) \end{aligned}$$

mit Hilfe einer Hilfsfunktion (Polynomgestalt).

(5 P.)

4PG/MC/02

1. Bestimmen Sie die Trajektorie

$$3x^2y^3\,dx + (x^3y^2 + y^4)\,dy = 0$$

2. ges.: allg. Lösung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y + 2z\\ \dot{y} &= 4x + 5y + 6z\\ \dot{z} &= x - y + 2z\end{aligned}$$

3. Stab. der Null-Lsg. mit Fkt. $v(t,x,y)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2y^3 - \frac{x}{t}\\ \dot{y} &= -tx^3y^2 - e^t y\end{aligned}$$

4. Phasenportrait, ∞-Grenzmenge

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 - xy\\ \dot{y} &= x^2 - xy^2\end{aligned}$$

4V4/ML/03

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$xy\,dx - x\,dy = 0$$

(3 P.)

2. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x + y + 4z\\ \dot{y} &= 5x - y + z\\ \dot{z} &= 2x + 3y + z\end{aligned}$$

(6 P.)

3. Stab. der Null-Lsg.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x-y)(x^4 + y^4 - xy - 1)\\ \dot{y} &= (3x+4y)(x^4 + y^4 - xy - 1)\end{aligned}$$

(5 P.)

4. Klassifikation der stationären Punkte, Phasenportrait

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x+4)(y^2 - y - 2)\\ \dot{y} &= (x+1)y(e^y - 1)\end{aligned}$$

(6 P.)

4D4/MC/C4

1. Bestimmen Sie die maximale Intervall-Lösung der Differentialgleichung:

$$\dot{x} = \exp(x + t) , \quad x(1) = 3$$

(3 P.)

2. Berechnen Sie die qualitative Lösung des homogenen Systems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y + 2z \\ \dot{y} &= -3x + 5y + z \\ \dot{z} &= x + 2y - 3z \end{aligned}$$

Angenommen, das System wird durch den Vektor $(\sin(2t), 3, 2t)$ gestört. Untersuchen Sie, ob dann periodische Lösungen existieren.

(6 P.)

3. Klassifikation der stationären Punkte

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x - y)(y^2 - 2y) \\ \dot{y} &= (x + 3)(y^3 + 1) \end{aligned}$$

(6 P.)

4. Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ???????????????? \\ \dot{y} &= ???????????????? \end{aligned}$$

a.) Zeichnen Sie das Phasenprotrait der Differentialgleichung.
b.) Bestimmen Sie die ∞-Grenzmenge zu jeder Lösung.

(5 P.)

4PG/MC/05

1. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$\ddot{x} = x\dot{x} + \sqrt{1+\dot{x}^2} \qquad \text{Angabefehler ?}$$

(3 P.)

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \cosh(t)\dot{x} - (1+\sinh(t))x = 0$$

Berechnen Sie dazu zuerst eine spezielle Löung einfacher Bauart und wenden Sie danach die Standardmethode an.

(5 P.)

3. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen von:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= w + x + y + 3z \\ \dot{y} &= 2x + 2y - 4z \\ \dot{z} &= -x - y + 3z \\ \dot{w} &= w + 2x - y - 2z \end{aligned}$$

(7 P.)

4. Gegeben ist das System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-y)(2x^2+y^2-1) \\ \dot{y} &= (2x+y)(2x^2+y^2-1) \end{aligned}$$

Gesucht ist das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung.
Berechnen Sie dieses mit Hilfe einer Hilfsfunktion von Polynomgestalt.

(5 P.)

4DG/MC/06

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von:

$$xy\,dx + x\,dy = 0$$

(3 P.)

2. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 5y - 3z \\ \dot{y} &= 6x + y + 2z \\ \dot{z} &= 3x - 4y - z \end{aligned}$$

(6 P.)

3. Klassifikation der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-4)(y^2 - y - 2) \\ \dot{y} &= (x-1)(e^y - 1)y \end{aligned}$$

(6 P.)

4. Stabilitätsverhalten der Null-Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2x+3y)(x^4 + y^4 + 3xy + 2) \\ \dot{y} &= -(4x+5y)(x^4 + y^4 + 3xy + 2) \end{aligned}$$

(5 P.)

1. Bestimmen Sie die Trajektorien der Differentialgleichung:

$$3(xy+4)\,dx + x^2\,dy = 0$$

(3 P.)

2. algemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\cos(t) - (\sin(t)-1)y \\ \dot{y} &= (\cos(t)-1)x - y\sin(t) \end{aligned}$$

(5 P.)

3. Klassifikation der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+y)(x^2y-4) \\ \dot{y} &= (y-4)(x^3-1) \end{aligned}$$

(6 P.)

4. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Differentialgleichung:

$$x^{(5)} + \ddddot{x} - \dddot{x} + 2\ddot{x} - 3\dot{x} = 0$$

(6 P.)

4D4/MC/08

1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Kurvenschar der Gleichung:

$$(x-a)^2 + 2y^2 = 0$$

(3 P.)

2. Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$x^2(x-1)\ddot{y} - x\dot{y} + y = 0 \quad \text{mit} \quad y(2) = 5\,, \quad \dot{y}(2) = 6$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung dadurch, daß Sie zuerst eine Polynomlösung finden, dann die Ordnung der Differentialgleichung reduzieren und dann die reduzierte Differententialgleichung lösen.

(6 P.)

3. Gegeben ist ein Differentialgleichungssystem der Dimension 4:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ????????????? \\ \dot{y} &= ????????????? \\ \dot{z} &= ????????????? \\ \dot{w} &= ????????????? \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung des Systems **ohne** die Jordan'sche Normalform!!!

(7 P.)

4. Bestimmen Sie das Phasenportrait von:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) \\ \dot{y} &= -x + y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie weiters zu jeder Lösung die ∞-Grenzmenge.

(4 P.)

4PG/ML/09

1. Bestimmen Sie die maximale Intervall-Lösung des Anfangwertproblems:

$$\dot{x} = e^{x}\cos(t)\,, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0$$

(3 P.)

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y + z \\ \dot{y} &= 2y - 4z \\ \dot{z} &= 2x + 2y \end{aligned}$$

(6 P.)

3. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung von:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3x - 4y)(x^2 + 5y^2 - 2) \\ \dot{y} &= (x + 6y)(x^2 + 5y^2 - 2) \end{aligned}$$

(6 P.)

4. Gegeben ist das folgende System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 + y^2 - 9) - y(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 + y^2 - 4) \\ \dot{y} &= y(x^2 + y^2 - 9) + x(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 + y^2 - 4) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die geschlossenen Trajektorien des Systems und skizzieren Sie das Phasenportrait. Bestimmen Sie weiters zu jedem Anfangswert die ∞-Grenzmenge der Lösung.

(4 P.)

4P4/ML/1c

1. Löse:

$$\dot{x} = -3\sin(tx) - \frac{e^{3\cos(t)}}{t}$$

(3 P.)

2. Qualitat. Verh.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y + 3z \\ \dot{y} &= 5x - y + 6z \\ \dot{z} &= -4x + 2y + z\end{aligned}$$

Existieren persiod. Lsg. bei Störfkt. $(\sin t, \cos t, 1)$?

(7 P.)

3. Stabilität der Gleichgewichtslagen von:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y(x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x(x^2 + y)\end{aligned}$$

(Hinweis (nicht von Mlitz): System instabil)

(4 P.)

4. Phasenportrait, Gleichgewichtslagen, Trajektorien der period. Lsg., ∞-Grenzmengen von:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sqrt{x^2+y^2}(x - y\sin 2\pi(x^2+y^2) - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2x}{x^2+y^2}) \\ \dot{y} &= \sqrt{x^2+y^2}(y + x\sin 2\pi(x^2+y^2) - \frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{2y}{x^2+y^2})\end{aligned}$$

(6 P.)

4D4/ML/11

1. Bestimmen Sie die maximale(n) Lösung(en) des Anfagswertproblems:

$$\dot{x} = \frac{t+1}{t-1}x^2 , \quad x(2) = 0$$

(3 P.)

2. allgemeine Lösung von:

$$\dddot{x} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = \mathrm{e}^{2t}$$

(4 P.)

3. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{w} &= w + x + y + 3z \\ \dot{x} &= 2x + 2y - 4z \\ \dot{y} &= -x - y + 3z \\ \dot{z} &= w + 2x - y - 2z \end{aligned}$$

(7 P.)

4. Untersuchen Sie die Stabilität der Null-Lösung für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3\mathrm{e}^t x - y)(x^2 + 3y^2 - 6) \\ \dot{y} &= (x + 6\mathrm{e}^t y)(x^2 + 3y^2 - 6) \end{aligned}$$

(6 P.)

4D4/ML/12

1. Bestimmen Sie die maximale(n) Lösung(en) und Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$\dot{x} = x^3 t e^{-t^2}, \quad x(0) = 1$$
(3 P.)

2. allgemeine Lösung von:
$$\begin{aligned} \dot{w} &= -x - 5y - 5z \\ \dot{x} &= w + 2x + 4y + 4z \\ \dot{y} &= w + 6y + 4z \\ \dot{z} &= -w - 4y - 4z \end{aligned}$$
(7 P.)

3. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Lösung $x = \sinh t$ von
$$\ddot{x} + (1-t)\dot{x} + (2-t)x = (1-t)e^{-t}$$
(4 P.)

4. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen und Trajektorien der periodischen Lösungen des Systems
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x^2 + y^2 - 4)\left(x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y(x^2+y^2)\right) \\ \dot{y} &= (x^2 + y^2 - 4)\left(x(x^2+y^2) + y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$
wobei die rechte Seite an (0,0) durch den Wert (0,0) stetig zu ergänzen ist. Skizzieren Sie das Phasenprotrait und untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Lösungen.

(6 P.)

1. max. Intervall-Lsg.

$$\dot{x} + \frac{x^2}{t} = 1\,, \quad x(1) = 2$$

(3 P.)

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -5w + 4y - 4z \\ \dot{x} &= w - y + 2z \\ \dot{y} &= -13w - x + 8y - 6z \\ \dot{z} &= -3w - x + y + z \end{aligned}$$

(w,x,y,z)(0)=(0,3,1,1)

(6 P.)

3. Phasenprotrait und zu jedem Anfangswert die ∞-Grenzmenge der zugehörigen Lösung.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^3y + xy^2 + xy \\ \dot{y} &= x^2y^2 + y^3 + y^2 \end{aligned}$$

(5 P.)

4. Klassifizieren Sie - soweit dies mit d. Standardmeth. mögl. - die stat. Pkte von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (y^2 - x)(y^2 + 2y - 3) \\ \dot{y} &= (x + y + 1)(xy - 8) \end{aligned}$$

(6 P.)

1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Schar der Kreise durch den Ursprung, deren Mittelpunkte auf der Parabel $y = 2x^2 - 1$ liegen.

(4 P.)

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - \frac{2y}{t^2} \\ \dot{y} &= t - x \end{aligned}$$

indem Sie zuerst 2 Lösungen des homogenen Systems mit y von der Gestalt $t^z (z \in \mathbb{Z})$ suchen und sodann nach der Standardmethode vorgehen.

(5 P.)

3. Untersuchen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + 2y + 3z \\ \dot{y} &= -2x + z \\ \dot{z} &= 2x - 3y + z \end{aligned}$$

(5 P.)

4. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-2x - 3y)(x^2 + y^2 - xy + 3) \\ \dot{y} &= (5x - 2y)(x^2 + y^2 - xy + 3) \end{aligned}$$

ohne das System zu linearisieren.

(5 P.)

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz - 21.6.2001

1. Bestimmen Sie die Einhüllende der Kurvenschar $(y+a)^2 + x(x+2a) = 2a$.

(3P)

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} = \cosh(t)\dot{x} - (1 + \sinh(t))x = 0$$

indem sie zunächst eine spezielle Lösung einfacher Bauart suchen. Die letzte Integration muss nicht durchgeführt werden.

(6P)

3. Bestimmen sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y + z \\ \dot{y} &= 2y - 4z \\ \dot{z} &= 2x + 2y \end{aligned}$$

Welche Gestalt haben die Lösungen des zugehörigen inhomogenen Systems mit der Störfunktion (t, t^3, e^t)

4. Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (3e^t x - y)(x^2 + 3y^2 - 6) \\ \dot{y} &= (x + 6e^t y)(x^2 + 3y^2 - 6) \end{aligned}$$

für $t \to \infty$

(6P)

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 4.12.1996

1. (4P) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differrentialgleichung

$$y = x(1 + y') + y'^2$$

2. (6P) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$x^{(3)} - 5\ddot{x} + 17\dot{x} - 13x = 26t + 18e^{2t} - \sin 3t$$

3. (5P) Untersuchen Sie das Stabilitästverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2e^t x - y)(x^2 + 2y^2 - 4) \\ \dot{y} &= (2x + 3e^t y)(x^2 + 2y^2 - 4) \end{aligned}$$

mit Gilfe eine Hilfsfunktion (von Polynomgestalt)

4. (5P)Bestimmen und skizzieren Sie das Phasenporträt des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^3 - xy \\ \dot{y} &= x^2 - xy^2 \end{aligned}$$

und ermitteln Sie für jeden anfangswet die ∞-Grenzmenge der zugehörigen Lösung (warum ist diese immer eindeutig bestimmt?)

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 25.6.1996

1. (3P) Bestimmen Sie die Trajektorien der Gleichung

$$(3xy + 4)dx + x^2 dy = 0$$

2. (5P) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\ddot{x} + \cosh(t)\dot{x} - (1 + \sinh t)x = 0$$

indem Sie zuerst eine spezielle Lösung (einfacher Bauart) suchen und sodann nach der Standardmethode vorgehen. (Die letzte auftretende Itegration muß nicht durchgeführt werden.)

3. (7P) Bestimen sie das qualitative Verhalten des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + y + 4z \\ \dot{y} &= 5x - y + z \\ \dot{z} &= 2x + 3y + z \end{aligned}$$

Hat das inhomogene Systm mit der Störfunktion

$$(\sin(2t), 0, t)$$

periodische Lösungen?

4. (5P) Bestimmen sie das Staibitätsverhalten der Null-Lösung de Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x - y)(2x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= (2x + y)(2x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

mit Hilfe einer Hilfsfunktion in Polynomgestalt

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 27.6.1997

1. Bestimmen Sie die maximale Intervalllösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = e^x \cos(t) \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

2. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen von

$$x^{(5)} + x^{(4)} - x^{(3)} + 2x^{(2)} - 3x = 0$$

für $t \to \infty$

$$(\sin(2t), 0, t)$$

periodische Lösungen?

3. Bestimmen sie das Staibitätsverhalten der Null-Lösung de Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{\sin(x^2+y^2)}{t^2} \\ \dot{y} &= -5x - ey + \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{e^t} \end{aligned}$$

4. Klassifizieren Sie (soweit es mit Standardmethoden möglich ist) die stationären Punkte des Sytems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x+y)(x^2y-4) \\ \dot{y} &= (y-4)(x^3-1) \end{aligned}$$

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 25.6.1998

1. (4P)Bestimmen sie die Trajektorien der Differentialgleichung

$$(2+3x^4-2x^2y)dx+(x^2y^2+x^2e^y-2x^3)dy=0$$

2. (6P)Stellen Sie die Randbedingungen in Matrixform dar und bestimmen Sie die Lösung(en) des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x-4y \qquad & x(0)-2y(0)&=1 \\ \dot{y} &= -2x+4y \qquad & x(0)-y(0)&=2-x(1) \end{aligned}$$

3. (6P)Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x+4y+2z \\ \dot{y} &= -3x+5y+z \\ \dot{z} &= x+2y-3z \end{aligned}$$

Angenommen das System wird durch

$$(\sin(2t),2,\cos(2t))$$

gestört, existieren dann periodische Lösungen?

4. (4P)Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2x+3y)(x^4+y^4+3xy+2) \\ \dot{y} &= (4x+5y)(x^4+y^4+3xy+2) \end{aligned}$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz
25.Juni.1998

1. Trajektorien von

$$(2 + 3x^4 - 2x^2y)dx + (x^2y^2 + x^2e^y - 2x^3)dy = 0 \qquad (4P)$$

2. RB in Matrixform, Lösung des RWP:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 4y & \qquad x(0) - 2y(0) &= 1 \\ \dot{y} &= -2x + y & \qquad x(0) - y(0) &= 2 - x(1) \qquad (6P) \end{aligned}$$

3. qualitat. Verhalten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 4y + 2z \\ \dot{y} &= -3x + 5y + z \\ \dot{z} &= x + 2y - 3z \end{aligned}$$

   Hat das zugeh. inhomogene System mit Störfunktion $(\sin 2t, 3, \cos 2t)$ period. Lösungen? (6P)

4. Stabilitätsverhalten der Nullösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-4x + 2y)(2x^2 \sin t + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= (3x - y)(2x^2 - 3y^2 \cos t + 6) \qquad (4P) \end{aligned}$$

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 1.12.1998

1. (4P)Bestimmen sie die Trajektorien der Differentialgleichung

$$xy^2 + (x^2y - x)dy = 0$$

2. (6P)Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + y + 3z \\ \dot{y} &= 2x + 3y + 3z \\ \dot{z} &= -2x - y - z \end{aligned}$$

Geben Sie die Gestalt einer partikulären L:osung des zugehörigen inhomogenen Systems mit Störfunktion

$$(\sin(t) + 3e^{2t}, \sin(t), -2e^{2t})$$

3. (4P)Bestimmen sie das Stabilitätsverhalten der Null-Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-4x + 2y)(\sin(t)x^3 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= (3x - y))2x^2 - 3\cos(t)y^2 + 6) \end{aligned}$$

4. (5P) Ermitteln Sie die Trajektorien der periodischen Lösung und skizzieren sie das Phasenportrait des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(x^2 + y^2 + 5)\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) - y(x^2 + y^2)\left(2 - (x^2 + y^2)^2\right) \\ \dot{x} &= x(x^2 + y^2)\left(2 - (x^2 + y^2)^2\right) + y(x^2 + y^2 - 1)\left(1 - \frac{5}{x^2 + y^2}\right) \end{aligned}$$

Gewöhnlich Differentialgleichungen

Prof. Mlitz 18.1.1999

1. (6P)Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y + z \\ \dot{y} &= 2y - 4z \\ \dot{z} &= 2x + 2y\end{aligned}$$

2. (6P) Betimmen Sie die stabilen Punkte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x^2 + y^2 - 4)(2x(x^2 + y^2 + 1) - y) \\ \dot{y} &= (x^2 + y^2 - 4)(x + 2y(x^2 + y^2 + 1))\end{aligned}$$

   und bestimmen sie zu jedem Anfagswert die ∞-Grenzmenge der entprechenden Lösung und skizzieren sie das Phasenportrait des Systems

3. (4P) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Lösung $x = \sinh(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + (1 - t)\dot{x} + (t - 2)x = (1 - t)e^{-t}$$

4. (6P) Klassifizieren Sie die stationären Punkte des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4y(x^2 - y + 3) \\ \dot{y} &= (2x - xy + 2)(x^2 + y - 9)\end{aligned}$$

PRÜFUNG AUS DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 01.06.2007

FAMILIENNAME:
VORNAME:

Bei dieser Prüfung dürfen keine schriftlichen Unterlagen und keine Taschenrechner verwendet werden!

1. Bestimmen Sie ein erstes Integral des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^3 - x^3 y \\ \dot{y} &= 3x^2y^2 - xy. \end{aligned}$$

Was wird durch das 1.Integral bestimmt ?

4P

2. Bestimmen Sie das qualitative Verhalten der Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + 2y - 2z \\ \dot{y} &= x - 4y + z \\ \dot{z} &= 5y + 2z. \end{aligned}$$

Hat das inhomogene System mit Störfunktion $(1, \cos t, \sin t)$ periodische Lösungen ?

7P

3. Bestimmen und skizzieren Sie das Phasenportrait des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^3 - xy \\ \dot{y} &= x^2 - xy^2 \end{aligned}$$

und ermitteln Sie für jeden Anfangswert die ∞-Grenzmenge der zugehörigen Lösung (warum ist die Lösung stets eindeutig bestimmt ?).

5P

4. Untersuchen Sie die Stabilität der Gleichgewichtslage(n) des Systems.

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

4P

Gewöhnliche Differentialgleichungen - Prof. Mlitz
Fragen zur mündlichen Prüfung

1. Äquivalenz von Systemen höherer Ordnung zu Systemen 1. Ordnung
2. Geometrische Interpretation - Trajektorien, Lösungskurven, Richtungsfeld, Tangentialvektor
3. Polygonzugverfahren von Euler und Cauchy
4. Idee hinter Runge-Kutta
5. Was stekt hinter Variation der Variablen ($\rightarrow$ Kettenregel)
6. erste Integrale
7. Existenzsätze - Picard-Lindelöf, Peano, Lipschitzbedingung
8. Approximation, die sich aus Picard-Lindelöf ergibt
9. Maximale Intervalllösungen
10. Parametrisierung durch y'
11. Was ist eine exakte Differentialgleichung? Was, wenn nicht exakt?
12. Orthogonale Trajektorien
13. Einhüllende von Kurvenscharen und ihre Bedeutung
14. Differentialgleichung zu einer Kurvenschar (in der Ebene $(F(x, y, a) = 0)$)
15. Allgemeine Form der Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen
16. Der Lösungsraum von Systemen linearer Differentialgleichungen; Wann sind Lösungen linear unabhängig; Formel der Wronski-Determinante
17. Wie löst man lin.hom.Gl. $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$
18. Reduktionsverfahren von d'Alembert
19. Variation der Konstanten
20. Resonanz(-phänomene)
21. qualitative Analyse - wie erkennt man aus Hurwitzmatrix nur imag. NS?
22. inhomogene Systeme - Ansätze (Exponentialansatz!, partikuläre Lösung, Variation der Konstanten, Resonanz)
23. lineare Gleichungssysteme mit period. Koeffizienten

24. benachbarte AWP - wann, Abschätzung der Differenz der Lösungen, ...
25. Stabilität (wozu?), asymptotische Stabilität
26. Ljapunow-Funktion (was, wofür)
27. Linearisierung (Methode, mögliche Rückschlüsse)
28. zulässige Rückschlüsse von Stabilitätsaussagen einfache Systeme (z.B. homogen-inhomogen)
29. ∞-Grenzmenge (Definition, Eigenschaften)
30. Kriterium von Dulac
31. Transversalen
32. was kann man aussagen: Trajektorien und Transversalen, $G_\infty(\phi)$ und Transversalen
33. Satz von Poincare-Bendixson
34. Phasenportrait von Sattelpunkt, anziehender Knoten, ...
35. wie erkennt man am Phasenportrait, daß es period. Lösungen gibt?

Lineare Randwertprobleme (Green-Matrix)

Qual. Analyse: Bestimmung der reellen Nullstellen eines Polynoms $p(t)$

(Antwort: Cauchy-Index)