Angewandte Statistik UE

VI,

1) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (\mu, \sigma^2) =: \Theta$ unbekannt

$$\Rightarrow \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}$$

Bilde Konfidenzintervall für μ mit ÜW $1-\alpha$:

$$1-\alpha = W_\Theta \left\{ -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n} \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$= W_\Theta \left\{ -\frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \overline{X}_n - \mu \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$= W_\Theta \left\{ \overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$\Rightarrow KI = \left[\overline{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} , \overline{X}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Konkret für golf.txt: $n = 100$; $\overline{X}_n = 274,476$; $S_n = 8,324943$

$1-\alpha$	KI für μ
0,90	[273,09; 275,86]
0,95	[272,82; 276,13]
0,99	[272,29; 276,66]

2) $\frac{(n-1)\, S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Konfidenzintervall für σ^2:

$$1-\alpha = W_\Theta \left\{ \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)\, S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$= W_\Theta \left\{ \frac{(n-1)\, S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\, S_n^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{KI für } \sigma: \quad W_\Theta \left\{ \sqrt{\frac{(n-1) S_n^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1) S_n^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}} \right\} = 1-\alpha$$

Konkret für golf.txt: $n = 100$; $S_n^2 = 69,30467$

$1-\alpha$	KI für σ^2	KI für σ
0,90	[55,68 ; 89,05]	[7,46 ; 9,44]
0,95	[53,43 ; 93,53]	[7,31 ; 9,67]
0,99	[50,96 ; 99,11]	[7,03 ; 10,16]

3) $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} E_\theta$; $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

a) $-\sum_{i=1}^n \ln F(X_i|\theta) \sim \mathrm{Gam}(n,1)$ vgl. S. 46

$F(X_i|\theta) \sim U_{0,1} \Rightarrow 1 - F(X_i|\theta) \sim U_{0,1}$

$\Rightarrow -\sum_{i=1}^n \ln(1 - F(X_i|\theta)) \sim \mathrm{Gam}(n,1)$

$$\ln(1 - F(X_i|\theta)) = \ln\left(1 - \int_0^{x_i} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx\right) = \ln\left(1 + e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{x=0}^{x_i}\right)$$
$$= \ln\left(1 + e^{-\frac{x_i}{\theta}} - 1\right) = -\frac{x_i}{\theta}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i$ ist Pivot-Größe für θ $(\sim \mathrm{Gam}(n,1))$
$=: P_1(\theta; X_1, \dots, X_n)$

b)

4) $X_1, \dots, X_n$ i.i.d., $X \sim \text{Gam}(r, \beta)$ ($r \in \mathbb{N}$, bekannt) d.h. $f(x|r,\beta) = \frac{x^{r-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(r)\, \beta^r} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

ges.: KI für β mit ÜW $1-\alpha$ mit Hilfe einer χ^2-Tabelle.

Wissen: $\text{Gam}(\alpha, 2) = \chi^2_{2\alpha}$

$X_i \sim \text{Gam}(r,\beta) \Rightarrow S = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gam}(nr, \beta)$ weg. Add.-Theorem

•) Zeige $Y := \frac{2}{\beta} S = \frac{2}{\beta} \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gam}(nr, 2)$ und somit PG für β.

Transformationssatz:

$$S(y) = \frac{\beta}{2} y \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dy} = \frac{\beta}{2}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_S\left(\frac{\beta}{2} y\right) \left|\frac{dS}{dy}\right| = \frac{\left(\frac{\beta}{2} y\right)^{nr-1} \cancel{y}\, e^{-\frac{\beta}{2} y \frac{1}{\cancel{\beta}}}}{\Gamma(nr)\, \beta^{nr}} \cdot \frac{\beta}{2}$$

$$= \frac{y^{nr-1}\, e^{-\frac{y}{2}}}{\Gamma(nr)\, 2^{nr}}, \text{ d.h. } Y \sim \text{Gam}(nr, 2) = \chi^2_{2nr}$$

•) Konstruktion des KI für β:

$$1-\alpha = W_\theta\left\{\chi^2_{2nr,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{2}{\beta} \overbrace{\sum_{i=1}^n X_i}^{n\overline{X}_n} \le \chi^2_{2nr,1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

$$= W_\theta\left\{\frac{\chi^2_{2nr,\frac{\alpha}{2}}}{2n\overline{X}_n} \le \frac{1}{\beta} \le \frac{\chi^2_{2nr,1-\frac{\alpha}{2}}}{2n\overline{X}_n}\right\}$$

$$= W_\theta\left\{\frac{2n\overline{X}_n}{\chi^2_{2nr,1-\frac{\alpha}{2}}} \le \beta \le \frac{2n\overline{X}_n}{\chi^2_{2nr,\frac{\alpha}{2}}}\right\}$$

5) $X_1, \dots, X_n$ i.i.d.; $X \sim U_{0,\theta}$ $(\theta > 0)$

ges.: KI mit ÜW $1-\alpha$ von möglichst kurzer Länge.

Wissen: aus Bsp 5.5: $X_{(n)}$ suffiziente Statistik für θ.

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n$$

•) Konstruiere Pivotgröße für θ: $W_\theta\left\{\frac{X_{(n)}}{\theta} \le x\right\}$

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \Rightarrow W_\theta\{X_{(n)} \le x\theta\} = F_{X_{(n)}}(x\theta) = x^n$$

$\Rightarrow \frac{X_{(n)}}{\theta}$ ist PG für θ.

•) Bilde KI mit ÜW $1-\alpha$:

$$W_\theta\left\{\frac{X_{(n)}}{\theta} \le x\right\} = x^n \Leftrightarrow W_\theta\left\{\frac{X_{(n)}}{\theta} \le x^{\frac{1}{n}}\right\} = x \Leftrightarrow W_\theta\left\{\frac{X_{(n)}}{x^{1/n}} \le \theta\right\} = x$$

Sei $0 < y < x < 1$, d.g. $W_\theta\left\{\frac{X_{(n)}}{x^{1/n}} \le \theta \le \frac{X_{(n)}}{y^{1/n}}\right\} = x - y = 1-\alpha$

$\Rightarrow \text{KI} = \left[\frac{X_{(n)}}{x^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{y^{1/n}}\right]$ $\quad \forall x,y \in (0,1)$ mit $x-y = 1-\alpha$.

·) Bestimme kürzestes KI:

$x - y = 1-\alpha \Leftrightarrow x = 1-\alpha+y$

Ziel: Minimierung von $\frac{1}{y^{1/n}} - \frac{1}{x^{1/n}} = \frac{1}{y^{1/n}} - \frac{1}{(1-\alpha+y)^{1/n}}$

Diese Fkt. ist streng monoton fallend $\overset{\text{in } y}{\forall} \Rightarrow$ Intervalllänge minimal für $y = \alpha$, $x = 1$.

$\Rightarrow KI := \left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}} \right]$.

6) Bsp. 5 mit der „statistischen Methode".

$\left(f_{X_{(n)}}(x) = \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) = n \frac{x^{n-1}}{\theta^n} 1\!\!1_{(0,\theta)}(x) \right)$

Definiere implizit:

$$\int_{-\infty}^{h_1(\theta)} f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int_{0}^{h_1(\theta)} f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \overset{\left(\frac{h_1(\theta)}{\theta}\right)^n}{F_{X_{(n)}}(h_1(\theta))} = \gamma_1 \Leftrightarrow h_1(\theta) = \gamma_1^{1/n}\cdot\theta$$

$$\int_{h_2(\theta)}^{\infty} f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int_{h_2(\theta)}^{\theta} f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \underbrace{F_{X_{(n)}}(\theta)}_{1} - F_{X_{(n)}}(h_2(\theta)) \overset{=\gamma_2}{\Leftrightarrow} h_2(\theta) = (1-\gamma_2)^{1/n}\cdot\theta$$

Es gilt: h_1, h_2 streng monoton, stetig und $h_1 < h_2$ für $\gamma_1^{\cancel{1/n}} + \gamma_2^{\cancel{1/n}} < 1$.

$\Rightarrow W\{h_1(\theta) \le X_{(n)} \le h_2(\theta)\} = 1-\gamma_1-\gamma_2 = 1-(\gamma_1+\gamma_2) = 1-\alpha$.

$\Leftrightarrow 1-\alpha = W\{\gamma_1^{1/n}\theta \le X_{(n)} \le (1-\gamma_2)^{1/n}\theta\}$

$= W\left\{ \frac{X_{(n)}}{(1-\gamma_2)^{1/n}} \le \theta \le \frac{X_{(n)}}{\gamma_1^{1/n}} \right\}$

$\Rightarrow KI = \left[\frac{X_{(n)}}{(1-\gamma_2)^{1/n}}, \frac{X_{(n)}}{\gamma_1^{1/n}} \right] \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit $\gamma_1+\gamma_2 = \alpha$ ($\Leftrightarrow$ zu Erg. von 5.)

$\Rightarrow KI$ minimal für $\gamma_2 = 1$, $\gamma_1 = \alpha$: $\left[X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{\alpha^{1/n}} \right]$