

# M3 TM UE SS08 Lösungen zu ausgewählten Beispielen

W.Herfort

June 28, 2008



# Contents

<b>1</b>	<b>Topologie</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Lebesguesche Integration</b>	<b>9</b>
2.1	Masse, Schwerpunkt, Drehmoment und Maßtheorie . . . . .	10
2.2	Oberflächenmaß eines $p$ -dimensionalen Flächenstücks im $\mathbb{R}^d$ . . . . .	12
2.3	Fluß eines stationären Vektorfeldes . . . . .	15
2.4	Zirkulation, Rotor, Wirbeldichte . . . . .	16
2.5	Fouriertransformation . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Einige (wenige) Druckfehler im Übungsskriptum</b>	<b>21</b>



# Vorwort

Die Vorlesung Mathematik 3 für TM ist in dieser Form das erste Mal gelesen worden. Für die Zusammenstellung der Übungsbeispiele sei auf diesem Weg H. Woracek gedankt. Im Folgenden Ergänzungen sowie Lösungen zu ausgewählten Beispielen des SS08. Ein Dankeschön im voraus für Hinweise.

W.Herfort



# Chapter 1

## Topologie

**Beispiel 24** Es genügt, zu zeigen, daß jede  $d$ -offene Kugel  $K_d(f, r)$  eine  $\tilde{d}$ -offene Kugel  $K_{\tilde{d}}(f, \tilde{r})$  enthält, diese eine  $\mathcal{T}$ -offene Umgebung  $O$  von  $f$  und schließlich  $O$  eine  $d$ -offene Kugel  $K_d(f, \rho)$ .

Es erscheint nützlich,  $\sigma_n := \frac{d_n(f_n, g_n)}{1+d_n(f_n, g_n)}$  als Abkürzung zu verwenden. Zunächst wählen wir  $N$  sodaß für  $n \geq N+1$  stets  $c_n \leq \frac{r}{2}$  gilt. Nun wählen wir  $C_N := \max_{i=1 \dots N} \frac{c_n}{\tilde{c}_n}$  und legen  $\tilde{r} := \frac{r}{2C_N}$  fest. Ist nun  $n \leq N$ , so ist  $c_n \sigma_n = \frac{c_n}{\tilde{c}_n} \tilde{c}_n \sigma_n \leq C_N \tilde{d}(f, g) \leq C_N \tilde{r} < r$ . Ist andererseits  $n \geq N+1$ , so ist  $c_n \sigma_n \leq c_n \leq \frac{r}{2}$ . Insgesamt ergibt sich  $d(f, g) < r$  für alle  $g \in K_{\tilde{d}}(f, \tilde{r})$ . Also enthält jede  $d$ -offene Kugel eine  $\tilde{d}$ -offene Kugel.

Nun sei eine  $\tilde{d}$ -offene Kugel  $K_{\tilde{d}}(f, \tilde{r})$  gegeben. Es werde  $N$  gewählt, sodaß  $\tilde{C}_N := \sum_{n=1}^N \tilde{c}_n < \frac{\tilde{r}}{2}$  gilt. Es soll

$$r_n := \begin{cases} \frac{\tilde{c}_n}{2\tilde{C}_N} & \text{falls } n \leq N \\ 1 & \text{falls } n \geq N+1 \end{cases}$$

sein. Nun bildet man die offene Menge  $O := \prod_{n=1}^{\infty} K_{\hat{d}_n}(f_n, r_n)$  und stellt leicht fest, daß sie in  $K_{\tilde{d}}(f, \tilde{r})$  enthalten ist.

Zuguterletzt soll eine Menge  $O$  der eben beschriebenen Art gegeben sein. Nun erweist sich für  $\gamma := \min_{n=1, \dots, N} c_n r_n$ , daß  $K_d(f, \gamma)$  in  $O$  enthalten ist.

**Beispiel 25** Zunächst macht man sich klar, daß "Kugeln" der Form  $K(n, p^{-k})$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $l \in \mathbb{N}$  eine Basis der Topologie beschreiben. Eine einfachere Beschreibung einer solchen Kugel ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Metrik, nämlich

$$K(n, p^{-k}) = \{z \in \mathbb{N} \mid z - n = p^l m, p \nmid m, p^{-l} < p^{-k}\} = \dots = (n + p^{k+1} \mathbb{Z}) \cap \mathbb{N}.$$

**Beispiel 31** Angenommen, es gibt einen abzählbaren Umgebungsfilter für ein  $f \in \mathbb{R}^X$ . Dann gibt es zu jedem  $U$  im Filter eine endliche Teilmenge  $E_U$  von  $X$  sodaß für alle  $x$  im Komplement  $U_x$  (die Projektion in die  $x$ -te "Koordinate") ganz  $\mathbb{R}$  ist. Der Durchschnitt aller  $U$  im Filter sollte aus  $\{f\}$  alleine bestehen, jedoch ist für alle  $x$  in  $X \setminus \bigcup_U E_U$  stets die Projektion ganz  $\mathbb{R}$ , und nicht, wie es sein sollte, einfach  $\{f(x)\}$ , ein Widerspruch.

**Beispiel 37** Die Abbildung lautet in konkreter Form  $\Phi(f) := f \circ \tau$ . Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir  $\Phi(f) = \Phi(g)$ , also  $f(e^{it}) = g(e^{it})$  für alle  $t \in [0, 2\pi]$  an. Da  $e^{it}$  lediglich für  $t = 0$  und  $t = 2\pi$  den gleichen Wert auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  annimmt, ergibt sich  $f = g$  zunächst für  $t \in [0, 2\pi)$  und dann eben auch im Abschluß  $[0, 2\pi]$ . Die Surjektivität ergibt sich, indem man einer stetigen Funktion  $g$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  mit periodischer Randbedingung  $g(0) = g(2\pi)$  ausgeht, eine aufgrund des Satzes von Stone-Weierstraß gegen  $g$  gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen  $\sum_{j=-N_n}^{j=N_n} c_{jn} e^{itn}$  ( $n$  ist der Folgenindex,  $j$  die Summationsvariable mit von  $n$  abhängigem Index  $N_n$ ) angibt, sodaß deren Grenzwert sich als  $\Phi(g)$  ergibt.

Schließlich ist  $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |\Phi(f)(t)| = \sup_{z \in \mathbf{T}} |f(z)|$ . Der Satz lautet, daß jede stetige Funktion  $f$  auf  $[0, 2\pi]$  mit periodischer Randbedingung gleichmäßig durch ein trigonometrisches Polynom approximiert werden kann. (Scheinbar, bitte er- und begründen!) etwas schwächer: Die klassische Fourierreihe von  $f$  konvergiert punktweise gegen  $f$ .

## Chapter 2

# Lebesguesche Integration

**Beispiel 48** Zunächst findet man für Indikatorfunktionen  $\chi_{[c,d]}$  sofort

$$J := \int_{\mathbb{R}} |\chi_{[c,d]}(F(x))|^p d\mu = \int_{\mathbb{R}} |\chi_{[c,d]}(F(x))| d\mu$$

Wegen der Existenz des Riemann-Stieltjesintegral  $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,d]}(F(x)) dF(x)$  findet man  $J = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[c,d]}(F(x)) dF(x) = d - c$ , und die letztere Gleichung gilt, weil  $F$  keine Unstetigkeitsstellen hat. Ist dann  $t := \sum_{i \in I} a_i \chi_{J_i}$  Treppenfunktion und  $M = \bigcup_{i \in I} J_i$  partitioniert in abgeschlossene paarweise disjunkte Intervalle, so gilt, wie man sich leicht überlegt,  $t^p = \sum_{i \in I} a_i^p \chi_{J_i}$  und  $|t^p| = \sum_{i \in I} |a_i|^p \chi_{J_i}$ . Deshalb ergibt Integration die Gültigkeit der Transformation für alle Treppenfunktionen.

Somit erweist sich die Transformationsformel als  $L^p$ -Isometrie zwischen den Räumen von Treppenfunktionen. Insbesondere ist sie ein stetiger linearer Operator  $A$  auf dem in  $L^p([a, b], \mu)$  dichten Raum der Treppenfunktionen in den Raum  $L^p([F(a), F(b)], \lambda)$ . Weil er linear ist, läßt er sich auf ganz  $L^p([a, b], \mu)$  zu einem stetigen linearen Operator fortsetzen. Weil er eine Isometrie zwischen den jeweils dichten Treppenfunktionen ist, kann das gleiche Argument auf den zu  $A$  inversen Operator angewendet werden. Demnach läßt sich  $A$  zu einer Isometrie von  $L^p([a, b], \mu)$  auf  $L^p([F(a), F(b)], \lambda)$  erweitern.

**Beispiel 49** Es sei  $\mathcal{T}$  der Raum der Treppenfunktionen. Dann ist  $\mathcal{T} \subseteq \bigcap_{p \geq 1} L^p$  und  $\overline{\mathcal{T}} = L^p$ , wobei Überstreichen den Abschluß einer in  $L^p$  enthaltenen Teilmenge bezüglich der  $L^p$ -Topologie ist. Somit ist wegen  $\mathcal{T} \subseteq L^p \cap L^q$

$$L^p = \overline{\mathcal{T}} \subseteq \overline{L^p \cap L^q} \subseteq L^p.$$

**Beispiel 63** Die unmittelbare Begründung geht davon aus, daß die Momente  $M_x, M_y$  einer in einem Punkt der  $(x, y)$ -Ebene konzentrierten Masse  $m$  per definitionem die Werte  $M_x = ym$  und  $M_y = xm$  haben. Somit ergibt sich unmittelbar als notwendige Bedingung an  $S$ :

$$M_x = my_S = M_x(B), \quad M_y = mx_S = M_y(B).$$

Mehr war nicht gefragt.

## 2.1 Masse, Schwerpunkt, Drehmoment und Maßtheorie

**Anmerkung 1** Hier einige wenige Anmerkungen, die darauf abzielen, sich von den “kleinen Würferln” bei physikalischer Modellierung ein wenig zu verabschieden:

**Masse(nverteilung):** Jedes endliche Borelmaß  $\mu$  auf dem  $\mathbb{R}^3$  kann als Massenverteilung und  $M := \int_{\mathbb{R}^3} d\mu$  als Gesamtmasse interpretiert werden. Der Körper, der so beschrieben wird, ist dann zwar nur bis auf eine Nullmenge “definiert”, was aber im Folgenden wenig Rolle spielt. Oft ist es üblich, den Körper mit dem *Träger des Maßes* zu identifizieren.

1. Ist die Masse in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^3$  konzentriert, so beschreibt  $m\delta_x$  ein Punktmaß mit Gesamtmasse  $m$ . Das Punkt- oder auch Diracmaß beschreibt somit einen Massenpunkt, d.i. eine punktförmige Masse. Gesamtmasse  $M = m$ .
2. Ist  $B$  eine Kreisscheibe mit Radius 1, welche in der  $(x, y)$ -Ebene liegt und Massendichte  $\rho(x, y)$  hat, so ist das zugehörige Maß das Produktmaß  $\rho(x, y)d\lambda_2(x, y) \otimes d\delta_0(z)$ . Sowohl das Punktmaß als auch das vorliegende sind *singuläre* Maße. Gesamtmasse  $M = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \rho(x, y)d\lambda_2(x, y)$ .
3. Ist  $B$  der Einheitswürfel mit Mittelpunkt im Ursprung und achsenparallelen Kanten mit Massendichte  $\rho(x, y, z)$ , so ist das zugehörige Maß durch eine Dichte  $\sigma(x, y, z) = \rho(x, y, z)$  gegeben falls  $(x, y, z)$  zum Würfel gehört und  $\sigma(x, y, z) = 0$  sonst. Ist  $\rho$  im Würfel stets  $\neq 0$ , so wird der Würfel zum Träger des Maßes. Es liegt ein reguläres Maß vor mit Dichte  $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^3)$ . Gesamtmasse  $M = \int_{\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq \frac{1}{2}} \rho(x, y, z) d\lambda_3(x, y, z)$ .

**Schwerpunkt:** Ist definiert durch  $S := \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} x d\mu$ , wobei das Integral koordinatenweise zu berechnen ist. Zur Herleitung aus dem Drehmoment siehe ein wenig weiter unten. Ist die Gesamtmasse  $M = 1$ , so wird auch vom *Erwartungswert* gesprochen. (Sind z.B. Mikroben in einer Schale gemäß  $\mu$  verteilt, so kann durch den Mittelwert, je nach Verteilung, unter manchen Umständen auf den ursprünglichen Infektionsort geschlossen werden).

**Kraftfeld, Gesamtkraft:** Ein Kraftfeld ist ein  $\mathbb{R}^3$ -wertiges Maß auf den Borelmengen im  $\mathbb{R}^3$ . In dieser Exposition sollen lediglich Gravitationskräfte behandelt werden. Solche Kräfte werden gerne als zumindest  $C^1$ -Funktionen auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  formuliert. Ist dann  $\mu$  eine Massenverteilung und  $k$  ein Kraftfeld, so wirkt als Gesamtkraft  $\int k d\mu$ .

1. Im Falle des Punktmaßes  $m\delta_x$  ergibt sich die Gesamtkraft  $mk(x)$ .
2. Bei der Kreisscheibe ergibt sich  $\int_{x^2+y^2 \leq 1} \rho(x, y)k(x, y, 0) d\lambda_2(x, y)$ .
3. Für den Würfel findet man  $\int_{\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq \frac{1}{2}} \rho(x, y, z)k(x, y, z) d\lambda_3(x, y, z)$ .

**Drehmoment:** Als Drehmoment einer Massenverteilung bezüglich des Punktes  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  im Kraftfeld  $k$  definiert man

$$D(x_0, \mu, k) := \int (x - x_0) \times k(x) d\mu(x).$$

In der Ausgangsaufgabenstellung wird vom Gravitationsfeld  $k(x) = k$  (meist  $k = -ge_3$ ) ausgegangen. Dann ergibt sich  $D(x_0, \mu, k) = \int (x - x_0) d\mu(x) \times k$  und nach Benützung obiger Definitionen  $D(x_0, \mu, k) = M(S - x_0) \times k$ .

1. Im Falle des Diracmaßes ergibt sich  $D = m(x - x_0) \times k(x)$ . Das Teilchen ist bestrebt, um den Punkt  $x_0$  in einer Ebene senkrecht zu  $D$  (Rechte-Hand-Regel: Ortsvektor, Kraft und Achse entsprechen Daumen, Zeige- und Mittelfinger) unter der Kraftereinwirkung  $k(x)$  zu rotieren.

2. Im Falle der Kreisscheibe findet man

$$D(x_0, \mu, k) = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ -z_0 \end{pmatrix} \times k(x, y, 0) \rho(x, y) d\lambda_2(x, y).$$

3. Für den Würfel ergibt sich

$$D(x_0, \mu, k) = \int_{\max\{|x|, |y|, |z|\} \leq \frac{1}{2}} \rho(x, y, z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times k(x, y, z) d\lambda_3(x, y, z).$$

**Schwerpunkteigenschaft bezüglich Drehmoment I:** Ist  $\mu$  eine Massenverteilung, so ist der Schwerpunkt  $S$  durch die für alle  $k \in \mathbb{R}^3$  geltende Gleichung

$$D(S, \mu, k) = 0$$

genau dann eindeutig bestimmt, wenn  $\mu$  nicht das Nullmaß ist.

Ausgeschrieben steht da  $M(S - x_0) \times k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{R}^3$  und sichtlich gibt es hierfür genau eine Lösung, nämlich  $S$ .

**Schwerpunkteigenschaft bezüglich Drehmoment II:** Gelegentlich wird eine Achse als Richtung  $a$  mit Länge 1 durch den Punkt  $x_0$  vorgegeben und ein Drehmoment bezüglich dieser Achse derart definiert, daß die Kraft  $k$  in die Normalebene zu  $a$  durch  $x_0$  projiziert wird. Wir verbleiben beim homogenen Kraftfeld (Gravitationsfeld für Leute, die noch auf einer Scheibe wohnen). Es sei  $x_0 + \lambda a$  eine Parametrisierung der Achse durch  $x_0$  mit Richtung  $a$ . Dann ergibt sich für die projizierte Kraft  $\phi = k - (a, k)a$ . Benötigt wird auch der Vektor, der vom Punkt auf der Achse in der Normalebene zum Punkt  $x$  zeigt. Er ergibt zu  $x - x_0 + (a, x - x_0)a$  und das Drehmoment unter der Kraftereinwirkung  $k$  bezüglich einer Achse  $a$  durch den Punkt  $x_0$  ist dann

$$D(a, x, k) = \int (x - x_0 + (a, x - x_0)a) d\mu(x) \times (k - (a, k)a).$$

Dieses Integral vereinfacht sich unter Benützung der obigen Definitionen sehr leicht zu  $D(a, x, k) = M(S - x_0 + (a, S - x_0)a) \times (k - (a, k)a)$ . Nun erfüllt  $S$  die Eigenschaft für alle  $a$  und  $D(a, x, k) = 0$ . Man erkennt, daß die obige Schwerpunktdéfinition zu einer Lösung der Gleichung führt. Schreibt man  $D(a, x, k) = 0$  in der Form

$$M(S + (a, S)a) \times (k - (a, k)a) = M(x_0 + (a, x_0)a) \times (k - (a, k)a)$$

an, so besagt diese Gleichung, daß  $x_0 = S$  die einzige Lösung dafür ist, daß bei beliebiger Wahl von  $a$  und  $k$  (links) das Drehmoment bezüglich der Achse  $a$  durch  $S$  der Massenverteilung  $\mu$  die Gleiche ist wie jene, wenn man sich auf der rechten Seite die Gesamtmasse  $M$  im Punkt  $S$  konzentriert denkt.

**Schwerpunkteigenschaft bezüglich Trägheitsmoment:** Als Trägheitsmoment einer Massenverteilung bei Rotation um den festen Punkt  $x_0$  definiert man

$$T(x_0, \mu) := \int \|x - x_0\|^2 d\mu.$$

Es zeigt sich, daß  $T$  als Funktion von  $x_0$  bei  $S$  ein globales Minimum hat, sofern nicht das Nullmaß vorliegt. Ist  $\mu$  ein W-Maß, so wird  $V(x) := T(a, S, \mu)$  als *Varianz* der stochastischen gemäß  $\mu$  verteilten Variablen  $x$  und die Wurzel  $\sigma := \sqrt{V(x)}$  hieraus als *Streuung* bezeichnet. Die augenfällige Gleichheit der Formeln läßt dem “intuitiven Gespür” reichlich Platz.

## 2.2 Oberflächenmaß eines $p$ -dimensionalen Flächenstücks im $\mathbb{R}^d$

**Beispiel 69** Man findet die Idee in

<http://asc.tuwien.ac.at/~funkana/homepages/hworacek/downloads/ana2la.pdf>  
auf Seite 110/111.

Zu beachten ist, daß man ab  $n \geq 3$  nicht notwendig ein  $\theta$  findet, sodaß

$$\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t) = \dot{\vec{x}}(t + \theta h)h$$

Man denke etwa an einen Gang der Schraublinie. Deshalb wird der MWS d DR komponentenweise angewendet, wie auf Seite 111 ausgeführt.

**Anmerkung 2 (Oberflächenmaß als Grenzwert von Maßen)** Es soll eine Motivation für die Verwendung der Formel

$$\mu(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} g(u) d(u), \quad g(u) := \sqrt{|\det(d\phi^T(u)d\phi(u))|}$$

zur Bestimmung der Oberfläche eines in einem offenen Teilbereich  $U$  von  $\mathbb{R}^d$  liegenden  $p$ -dimensionalen Flächenstückes  $A$  gegeben werden. Dabei soll  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  eine stetig differenzierbare Einbettung (“Parametrisierung von  $A$ ”) sein. Vorausgesetzt soll sein, daß wir die Transformationsformel der Integration im  $\mathbb{R}^n$  und dortige Volumsbestimmung für gültig erachten, weil für  $d = p$  die Gleichung  $g(u) = |\det(d\phi(u))|$  für eine Transformation  $x = \phi(u)$  gilt. Weiters soll Drehinvarianz bezüglich Drehungen im  $\mathbb{R}^d$  des  $p$ -dimensionalen Flächenmaßes auf  $M = \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^d$  gefordert sein. Ohne auf Details einzugehen (nämlich daß man  $A$  nicht “allzugroß” wählt, damit man den Hauptsatz der impliziten Funktionen verwenden kann), erweist es sich dann als ausreichend, die Parametrisierung von  $M$  in der Form  $\phi(u) = \begin{pmatrix} u \\ \psi(u) \end{pmatrix}$  anzunehmen, wobei  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{d-p}$  stetig differenzierbar ist. Es werde nun die eingebettete  $p$ -dimensionale Fläche  $A$  in jedem ihrer Punkte mit einem Einheitsnormalvektor versehen: da die Spalten der “Blockmatrix”  $\begin{pmatrix} I_p \\ d\psi(u) \end{pmatrix}$  eine Basis des Tangentialraums an  $\begin{pmatrix} u \\ \psi(u) \end{pmatrix} \in A$  bilden, sind die Spalten der Blockmatrix  $\begin{pmatrix} -d\psi(u)^T \\ I_{d-p} \end{pmatrix}$  eine Basis des Orthogonalraums, sodaß jeder Vektor im Orthogonalraum von der Bauart

$$n(u, b) := \begin{pmatrix} -d\psi(u)b \\ b \end{pmatrix}$$

mit  $b \in \mathbb{R}^{d-p}$  ist. Nun legen wir mit Hilfe von  $n(u, b)$  für  $\epsilon > 0$  eine  $\epsilon$ -dicke “Schicht”  $A_\epsilon$  um  $A$ , die sich daher wie folgt beschreiben läßt:

$$A_\epsilon = \left\{ \begin{pmatrix} u - d\psi(u)^T b \\ d\psi(u) + b \end{pmatrix} \mid \|d\psi(u)^T b\|^2 + \|b\|^2 \leq \epsilon^2 \right\}$$

Wird  $u$  festgehalten, so parametrisiert

$$b \mapsto \begin{pmatrix} -d\psi^T(u)b \\ b \end{pmatrix}$$

für  $\|d\psi(u)^T b\|^2 + \|b\|^2 \leq \epsilon^2$  eine  $d - p$  dimensionale “Kreisscheibe” mit Volumen  $\epsilon^{d-p}V$ , wobei  $V$  das Volumen der  $d - p$  dimensionalen Einheitskreisscheibe ist.

Wir wollen die Motivation als “gelungen” ansehen, falls

$$\mu(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_d(A_\epsilon)}{\epsilon^{d-p}V}.$$

Es verbleibt, das  $d$ -dimensionale Volumen von  $A_\epsilon$  zu berechnen.

Nun bedienen wir uns bei festem  $\epsilon$  der Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \chi(u, v) := \begin{pmatrix} u - d\psi(u)^T b \\ \psi(u) + b \end{pmatrix},$$

und benötigen die Funktionaldeterminante, wobei der  $(u, b)$ -Integrationsbereich  $\chi^{-1}(A_\epsilon)$  wie folgt festliegt:

$$\chi^{-1}(A_\epsilon) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \mid u \in \phi^{-1}(A), \|d\psi(u)^T b\|^2 + \|b\|^2 \leq \epsilon^2 \right\}$$

Somit ist, die übliche Transformationsformel im  $\mathbb{R}^d$  benützend

$$\lambda_d(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} d\lambda_d(x, y) = \int_{\chi^{-1}(A_\epsilon)} |\det(d\chi(u, b))| d\lambda_d(u, b).$$

Die Funktionalmatrix  $\det(d\chi(u, b))$  ergibt sich unter Beachtung, daß  $\phi$  eine  $C^1$  Abbildung und  $A$  kompakt ist, zu

$$\begin{pmatrix} I_p + O(\epsilon^p)b & -d\psi(u) \\ d\psi(u)^T & I_{n-p} \end{pmatrix},$$

wobei die Blockung der Vektoren die Blockmatrizenstruktur ergibt ( $I_l$  ist für beliebiges  $l \in \mathbb{N}$  eine  $l \times l$ -Einheitsmatrix). Für  $\epsilon = 0$  ergibt sich ( $B := d\psi(u)$  in der Fußnote setzend) als Wert der Funktionaldeterminante  $g(u) + O(\epsilon^p)$ .

Den Satz von Fubini benützend kann das Integral zur Berechnung von  $\lambda_d(A_\epsilon)$  als iteriertes Integral angeschrieben werden:

$$\lambda_d(A_\epsilon) = \int_{\phi^{-1}(A)} (g(u) + O(\epsilon^p)) d\lambda_p(u) \int_{\{b \in \mathbb{R}^{d-p} \mid \|d\psi(u)^T b\|^2 + \|b\|^2 \leq \epsilon^2\}} d\lambda_{d-p}(b)$$

Das zweite Integral hierin ist das Maß der Menge

$$K_\epsilon := \{b \in \mathbb{R}^{d-p} \mid \|d\psi(u)^T b\|^2 + \|b\|^2 \leq \epsilon^2\},$$

deren bestimmende Ungleichung auch unter Benützung von Matrizen angegeben werden kann, nämlich  $b$  erfüllt die Ungleichung

$$b^T (d\psi(u)d\psi(u)^T + I_{n-p})b \leq \epsilon^2.$$

Somit ergibt sich als Maß  $\sqrt{\det(I_{n-p} + d\psi(u)d\psi(u)^T)}V\epsilon^{d-p}$ , wobei  $V$  (wie oben schon gesagt) das Volumen der  $d-p$  dimensionalen Einheitskugel ist. Unter Einbeziehung der Fußnote<sup>1</sup> ist dieser Wert gleich  $\sqrt{g(u)}$ .

Dies führt auf

$$\lambda(A_\epsilon) = \int_{\phi^{-1}(A)} \sqrt{g(u)} d\lambda_p(u) + O(\epsilon^p),$$

was zu zeigen war.

<sup>1</sup> Wir wollen zeigen, daß  $\det(I_p - AB) = \det(I_{n-p} - BA)$  für eine beliebige  $n-p \times p$  Matrix  $A$  und

## 2.3 Fluß eines stationären Vektorfeldes

Die Beschreibung einer stationären  $C^1$ -“Strömung” in einer offenen Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^3$  kann durch eine auf  $\Omega \times I$  definierten  $C^1$ -Funktion  $\Phi(\vec{x}, t)$  gegeben sein, wobei  $I$  ein (der Einfachheit halber um  $t = 0$ ) symmetrisches (Zeit)intervall ist. Dabei bedeutet  $\Phi(\vec{x}, t)$  die Position, die ein zum Zeitpunkt  $t = 0$  in  $\vec{x}$  befindliches Teilchen zum Zeitpunkt  $t$  einnimmt. Sichtlich ist

$$\Phi_t(\vec{x}, t)$$

die vektorielle Momentangeschwindigkeit, welche das Teilchen am Ort  $\vec{x}$  zur Zeit  $t$  besitzt. Das *Stationärsein* drückt sich dahingehend aus, daß  $\vec{v}(\vec{x}) := \Phi_t(\vec{x}, t)$  nicht von der Zeit abhängt. Der *Existenz- und Eindeutigkeitsatz* der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen besagt nun, daß bei auf  $\Omega$  gegebenem stetigem stationären Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{x})$  die Aufgabe

$$\Phi_t(\vec{x}, t) = \vec{v}(\Phi(\vec{x}, t)), \quad \Phi(\vec{x}, 0) = \vec{x}$$

für ein passendes offenes Intervall  $I$  mit  $0 \in I$  unter den gegebenen Voraussetzungen eine in  $\Omega \times I$  eindeutige Lösung  $\Phi(\vec{x}, t)$  besitzt. Somit kann zum Feld eine “Strömung” angegeben werden, deren vektorielle Momentangeschwindigkeit für alle Zeiten in  $I$  am Punkt  $\vec{x}$  gleich  $\vec{v}(\vec{x})$  ist.

Um nun zum Fluß eines Feldes durch eine vorgegebene Fläche  $A_0$  zu kommen, betrachtet man

$$A_t := \{\Phi(\vec{x}, t) \mid \vec{x} \in A_0\},$$

also jene “Fläche”, in die  $A_0$  unter der Strömung zum Zeitpunkt  $t$  übergegangen ist. Ist nun  $\phi: B \rightarrow A_0$  eine Durchlaufung (injektive Parametrisierung) von  $A_0$ , so parametrisiert

$$(u, t) \mapsto \Psi(u, t) := \Phi(\phi(u), t)$$

für  $t \in I$  alle Punkte in  $\Omega$ , für die ein Teilchen in  $A_0$  zu irgendeinem Zeitpunkt  $t \in I$  gelangt. Es erscheint nun sinnvoll, das vorzeichenbehaftete Volumen

$$V(t) := \int_0^t dt \int_{\phi^{-1}(A_0)} \det(\Psi_u, \Psi_t)(u, t) d\lambda_2(u)$$

als *Bilanz* für die im Zeitraum  $[0, t]$  durch  $A_0$  insgesamt “hindurch” transportierte Flüssigkeit zu sehen. Die zeitliche Ableitung  $\dot{V}(0)$  wird dann als *Fluss* der Flüssigkeit durch die Fläche  $A_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  (und wegen der Stationarität zu jedem Zeitpunkt) bezeichnet. Differenzieren und Anwendung der Kettenregel  $\Psi_u = \Phi_u \phi'$ , sowie  $\Phi_u(\phi(u), 0) = I$  liefert

---

eine beliebige  $p \times n - p$  Matrix  $B$  gilt: Die Blockmatrizen  $\begin{pmatrix} I_p & A \\ B & I_{n-p} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} I_p - AB & A \\ 0_{n-p \times p} & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & A \\ -B & I_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times n-p} \\ -B & I_{n-p} \end{pmatrix}$  haben die gleiche Determinante, nämlich  $\det(I_p - AB)$ . Durch nach vorne tauschen der letzten  $n - p$  Spalten und danach nach oben Tauschen der letzten  $n - p$  Zeilen ergibt sich aus der Matrix  $\begin{pmatrix} I_p & A \\ B & I_{n-p} \end{pmatrix}$  die Matrix  $\begin{pmatrix} I_{n-p} & B \\ A & I_p \end{pmatrix}$ . Also haben die beiden Matrizen die gleiche Determinante und die Behauptung folgt.

$$\text{Flux}(\vec{v}, A_0) := \dot{V}(0) = \int_{\phi^{-1}(A_0)} \det(\phi'(u), \vec{v}(\phi(u))) d\lambda_2(u).$$

Man erkennt, daß der Fluß von der *Orientierung* insofern abhängt, als der Normalenvektor entlang  $A_0$  stets definiert sein muß und bei Parameterwechsel der Fluss negativ sein kann. Um das Bilden des inneren Produkts des Vektorprodukts der Tangentialvektoren an die Fläche  $A_0$  mit dem Feld zu vermeiden, soll die obige Formel für eine Parametrisierung  $\phi(u, v)$  von  $A_0$  und ein Feld  $\vec{v} = (P, Q, R)^T$  noch in einer in vielen Formelsammlungen zitierten Form

$$\text{Flux}(\vec{v}, A_0) = \int_{\phi^{-1}(A_0)} \begin{vmatrix} \phi_{1u} & \phi_{1v} & P\phi \\ \phi_{2u} & \phi_{2v} & Q\phi \\ \phi_{3u} & \phi_{3v} & R\phi \end{vmatrix} d(u, v)$$

angegeben werden.

## 2.4 Zirkulation, Rotor, Wirbeldichte

Zunächst soll die *Zirkulation* eines auf einer offenen Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  definierten  $C^1$ -Feldes  $\vec{v}$  erläutert werden. Es sei eine (Dreh)achse (der Einfachheit halber) als  $z$ -Achse vorgegeben. Nun zerlegen wir das Feld  $\vec{v}$ , indem wir in jedem Punkt  $\vec{x}$  die Projektion auf die (von oben gesehene) Tangente an einen entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreis in der Höhe  $z$  betrachten. Lineare Algebra ergibt für  $\vec{v} = (u, v, w)^T$  sofort als gesuchte Projektion

$$\vec{h} := \frac{-yu + xv}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  ist. Jede Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \vec{h}(\vec{x})$$

liegt, wie man sich sofort überzeugt auf einem Kreis mit der Gleichung  $z = \text{konst}$  und  $x^2 + y^2 = \text{konst}$ . Hierzu schreibt man die Gleichungen in Koordinaten an:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{-yu + xv}{r}(-y) \\ \dot{y} &= \frac{-yu + xv}{r}x \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich die Konstanz von  $z$ , also liegt jede Lösung in einer festen zur  $(x, y)$ -Ebene parallelen Ebene. Schließlich multipliziert man die erste Gleichung mit  $x$ , die zweite mit  $y$ , addiert und findet  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(r^2) = 0$ , woraus  $x^2 + y^2 = \text{konst}$  folgt. Unsere "Flüssigkeit" führt somit (lokal) Rotationsbewegung um die  $z$ -Achse aus. Ist  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Parametrisierung eines (kleinen) Kreises der Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ z_0 \end{pmatrix},$$

so nennt man

$$Z(\gamma, \vec{h}) := \int_0^{2\pi} \langle \dot{\gamma}, \vec{h} \rangle dt = \dots = R \int_0^{2\pi} (-u(R \cos t, R \sin t, z_0) \sin t + v(R \cos t, R \sin t, z_0) \cos t) dt$$

die *Zirkulation*. Sie beschreibt eine Bilanz der entlang des Kreises transportierten Flüssigkeit.

Ganz allgemein wird für eine geschlossene Kurve  $\gamma$  das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} \langle \vec{v}, d\vec{x} \rangle$$

als Zirkulation von  $\vec{v}$  entlang  $\gamma$  bezeichnet und als (in Richtung der Durchlaufung) transportierte Flüssigkeitsbilanz gedeutet.

Um nun zum *Rotor* zu kommen, beachten wir zunächst, daß vertikal keine Flüssigkeit vermittels  $\vec{h}$  transportiert wird (weil alle Lösungen auf horizontalen Kreisen liegen). Nun betrachtet man den Quotienten

$$\frac{Z(\gamma, \vec{h})}{2\pi R}$$

und läßt dabei  $R$  gegen Null streben. Taylorentwicklung von  $u, v$  an  $(0, 0, z_0)$ , Mittelwertsatz der Integralrechnung und Grenzwertbildung ergeben den Wert

$$v_x - u_y$$

auszuwerten am Punkt  $(0, 0, z_0)$ . Dies ist die  $z$ -Komponente des *Rotors*

$$\text{rot } \vec{v} := \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}.$$

Schließlich sei noch vermerkt, daß der Rotor auch als *Wirbeldichte* bezeichnet wird. Die Berechtigung für diese Bezeichnung sei nur kurz skizziert: In der gegebenen Situation betrachtet man eine Bilanz für die in der Kreisscheibe  $z = z_0$ ,  $x^2 + y^2 \leq R^2$  entgegen dem Urzeigersinn transportierten Flüssigkeitsmenge. Als mögliche ad-hoc Definition reicht es, sich diese Flüssigkeitsmenge als

$$\int_0^R Z(\gamma_r, \vec{h}) dr$$

vorzustellen, wobei  $\gamma_r$  ein Kreis mit Radius  $r$  ist. Dividiert man dies durch  $R^2\pi$  und geht mit  $R \rightarrow 0^+$ , so gewinnt man ebenfalls den Term  $v_x - u_y$ .

## 2.5 Fouriertransformation

**Beispiel 94** Es bezeichne  $F : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  die Fouriertransformierte. Wegen Beispiel 92 hat man für  $a = 1$  sofort

$$F \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1}_{[-1,1]} \right) (\lambda) = \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

Es bezeichne (siehe mehr davon im Bspl 97)  $J$  den Operator, der  $f$  in die Funktion  $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$  überführt. Danach liest sich 4.2.7 als  $FF = J$  (Operatoren auf  $L_2(\mathbb{R})$ ). Deshalb ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_{[-1,1]} = J\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_{[-1,1]}\right) = FF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}_{[-1,1]}\right) = F\left(\frac{\sin \cdot}{\cdot}\right),$$

weil die angegebene Funktion gerade ist, also  $Jf = f$  erfüllt.

In analoger Weise findet man

$$F\left(\frac{\cos \cdot - 1}{\cdot}\right)(x) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sign}(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

Es verbleibt das übliche "Unbehagen", daß Funktionen nur bis auf Nullmengen definiert sind, und man diese Nullmengen recht frei wählen darf (siehe auch den Nachsatz zu Beispiel 97).

**Beispiel 97** Es sei  $\mathcal{S}$  der Schwartzraum. Die Formel

$$f(x) = \int_0^\infty (a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x)) d\lambda$$

legt es nahe, auf  $\mathcal{S}$  die Operatoren

$$Cf(x) := \int_0^\infty f(\lambda)\cos(\lambda x) d\lambda, \quad Sf(x) := \int_0^\infty f(\lambda)\sin(\lambda x) d\lambda$$

zu betrachten, wobei  $Cf$  eigentlich für  $C(f)$  steht, etc. Dann hat man

$$f = Ca + Sb$$

und möchte  $a$  und  $b$  in einfacher Weise als Fouriertransformierte (bzw. Fouriercosinus- Fourier-sinustransformierte) ausdrücken.

Weiters sollen dort die Operatoren  $Jf(x) := f(-x)$ , sowie  $G := \frac{1}{2}(I + J)$ ,  $U := \frac{1}{2}(I - J)$  definiert werden. Die Fouriertransformierte werde in *Präfixnotation* durch

$$Ff(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\lambda x} dx$$

dargestellt. Somit ist  $\hat{f} = Ff$ . Die Identität in 4.2.7 (Satz) liest sich als

$$FF = J \Leftrightarrow I = FFJ.$$

Man findet nach Zerlegen des Integrals über  $\mathbb{R}^+$  und  $\mathbb{R}^-$  und Benützen der Substitution  $x = -t$  im negativen Teil sehr leicht die Formeln

$$Af(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(\lambda x) dx = \frac{1}{\pi}(C + CJ)f(\lambda) = \frac{2}{\pi}Cf(\lambda) \quad (2.1)$$

und

$$Bf(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(\lambda x) dx = \frac{1}{\pi}(S + SJ)f(\lambda) = \frac{2}{\pi}Sf(\lambda) \quad (2.2)$$

Es ist Ziel der Erläuterungen,  $a = Af$  und  $b = Bf$  zu zeigen.

Es ergeben sich sehr leicht die Identitäten

$$FG = \sqrt{\frac{2}{\pi}}CG, \quad FU = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}SU \quad (2.3)$$

weil  $Cf$  gerade und  $Sf$  ungerade ist und wir vermerken noch  $GFG = FG$ , sowie  $UFU = -FU$ . Es ist sinnvoll  $Ga = a$  (also  $a$  gerade) und  $Ub = b$  (also  $b$  ungerade ist) zu verlangen, weil der ungerade Anteil von  $a$  (der gerade Anteil von  $b$ ) jeweils mit Null zur jeweiligen Transformation beiträgt. Dies benützend findet man nach ein wenig Rechnen mit den angegebenen Operatoren

$$FGFG = FFG = JG = G, \quad FUFU = F(-FU) = -JU = U,$$

sodaß sich nunmehr aus  $f = Ca + Sb$  sofort

$$Cf = C^2a = \frac{\pi}{2}a, \quad Sf = S^2b = \frac{\pi}{2}b$$

ergibt. Hieraus gewinnt man mittels der Gleichungen 2.1 und 2.2 die Formel

$$\boxed{a = \frac{2}{\pi}Cf = Af, \quad b = \frac{2}{\pi}Sf = Bf},$$

die in vielen Nachschlagwerken zu finden ist (z.B. Bronstein-Semendjajew).

Schließlich, da  $\mathcal{S}$  im  $L_2(\mathbb{R})$  dicht liegt, ist diese Beziehung auch dann richtig, wenn  $C$  und  $S$  die stetigen Fortsetzungen der Operatoren  $C, S$  von  $\mathcal{S}$  in den  $L_2(\mathbb{R})$  sind.

**Nachsatz:** Die Fortsetzungen von  $C, S, F$  etc. in den  $L_2(\mathbb{R})$  entziehen sich der Maß- und Integrationstheorie, m.a.W. sind nicht durch "handelsübliche" Integrale (Lebesgue-, (un-)eigentlich) Riemann-, Daniell-, Denjoy- etc) begreifbar, sondern alles beruht auf dem folgenden funktionalanalytischen Sachverhalt, der z.B. in der Bemerkung 4.2.16 auf Seite 113 des Skripts konkretisiert wird:

**Lemma** *Es sei  $U$  dichter Teilraum des Banachraumes  $V$  und  $f : U \rightarrow W$  stetiger linearer Operator mit Werten im Banachraum  $W$ . Dann gibt es eine eindeutige stetige Fortsetzung von  $f$  zu einem stetigen linearen Operator  $\tilde{f} : V \rightarrow W$ .*

*Beweis:* Falls es eine solche Fortsetzung gibt, muß aus Stetigkeitsgründen für  $v = \lim_n u_n$  stets  $\tilde{f}(v) = \lim_n f(u_n)$  gelten. Wenn es somit gelingt, die Existenz des zweiten der Limiten stets nachzuweisen und festzustellen, daß dadurch  $\tilde{f}$  wohldefiniert und stetig ist, ist der Nachweis des Lemmas erbracht.

Zunächst soll die Existenz von  $\lim_n f(u_n)$  gezeigt werden. Ist  $N$  derart, daß bei gegebenem  $\delta > 0$  stets  $\|u_n - u_m\| < \delta$  für  $m, n \geq N$  gilt, so gibt es wegen der Stetigkeit von  $f$  eine Konstante  $C$  mit  $\|f(u_n) - f(u_m)\| \leq C\delta$ . Deshalb ist die Folge  $\{f(u_n)\}_{n=1}^\infty$  eine Cauchyfolge in  $W$ , sodaß, wie behauptet, der Grenzwert existiert.

Die Wohldefiniertheit ergibt sich hieraus, indem man eine zweite Folge  $\{u'_n\}_{n=1}^\infty$  mit  $\lim_n u'_n = v$  wählt, und nun eine gegen  $v$  konvergente *Mischfolge* bildet. Da die Funktionswerte dieser Mischfolge konvergieren, ist der Grenzwert  $\tilde{f}(v)$  wohldefiniert.

Es verbleibt, die Stetigkeit von  $\tilde{f}$  nachzuweisen. Es ist  $\|f(u_n)\| \leq C\|u_n\|$ , woraus durch Grenzwertbildung sofort  $\|\tilde{f}(v)\| \leq C\|v\|$  folgt, was zu zeigen war.



## Chapter 3

# Einige (wenige) Druckfehler im Übungsskriptum

Nach Beispielen geordnet:

- 2: In der Formel für  $\tilde{d}$  fehlt sollte es  $\tilde{c}_n$  heißen.
- 52: Es sollte der  $\mathbb{R}^3$  sein, sowie in der Transformationsformel jeweils  $\lambda_3$ .
- 81: Es ist üblich,  $\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x})$  zu setzen, auch wenn der (mathematische) Kern des Beispiels hiedurch nicht betroffen wird.
- 86: Es sollte  $c_V = 1$  und  $c_p = 2$  heißen, es würde als Angabe auch  $c_p - c_v = 1$  genügen. Man findet  $W = -\int_\gamma p dV = \pi$ .
- 88: Im Gaußschen Integralsatz (die Formel) sollte  $4\pi$  statt  $\pi$  stehen.
- Der Kommentar vor 90: Die Inkompressibilität hat hier nichts verloren. Die Formel für die Divergenz eines Feldes  $\vec{v} = (P, Q, R)^T$  lautet  $\operatorname{div}(\vec{v}) = P_x + Q_y + R_z$ . Auch in 90 hat die Inkompressibilität nichts verloren.
- 95: Möglicherweise wäre es einfacher,  $f \in L_2(0, l)$  ohne die Randbedingungen vorzugeben. Die Überlegungen verlaufen analog, es konvergiert die Fourierreihe

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-\lambda_k^2 t} e^{i\lambda_k x}$$

absolut gleichmäßig für  $t \geq t_0$  bei vorgegebenem festen  $t_0 > 0$  und löst die DGL im Sinne einer (*klassischen Lösung*) auf  $(0, l) \times \mathbb{R}^+$ . Die Anfangsbedingung wird im Sinne der  $L_2$ -Norm erfüllt:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(\cdot, t) - f(\cdot)\|_{L_2} = 0.$$

Die Fouriersinusreihe ist eine zusätzliche Komplikation, die eigentlich darauf beruht, daß man die Randbedingungen (Abkühlung an den Enden) stellt. Es wird verschleiert, daß man aufgrund der Randbedingungen die Lösung im  $H_0^1(0, l)$  sucht und die gegebenen Sinusfunktionen nach geeigneter Normierung als vollständiges ONS im  $H_0^1(0, l)$  benützt.