10.6.10

Analysis 3 UE

IX)

Sei $O \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Ein Vektorfeld $F: O \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ heißt Potentialfeld, wenn $\exists$ Funktion $U: O \to \mathbb{R}$ (ihr Potential) mit $F = -\operatorname{grad} U$.

82. <u>ZZ:</u> Gravitationsfeld eines MP $(\xi, \eta, \zeta)^T$ ist Potentialfeld.

Gravitationsfeld $F: \mathbb{R}^3 \setminus (\xi, \eta, \zeta)^T \longrightarrow L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{m}{r^3}(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)$$

mit $r := \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

Soll gelten: $F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_2 = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_3 = -\frac{\partial U}{\partial z}$ für ein $U: \mathbb{R}^3 \setminus (\xi, \eta, \zeta)^T \to \mathbb{R}$.

Bestimme also Stammfunktion von F:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{m}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}(x-\xi)$$

$$\Rightarrow U(x,y,z)^T = -m \underbrace{\int \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,dx}_{} + g(y,z) = -\frac{m}{r} + g(y,z)^T.$$

$$\left| \begin{matrix} (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = u \\ 2(x-\xi)\,dx = du \end{matrix} \right|$$

$$\int \frac{du}{2u^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{r}$$

Probe $\rightsquigarrow g(y,z)^T = c \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow U(x,y,z)^T = -\frac{m}{r} + c \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus (\xi, \eta, \zeta)^T$

83. Sei $F: O \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ Potentialfeld.

a) <u>ZZ:</u> $\operatorname{rot} F = 0$.

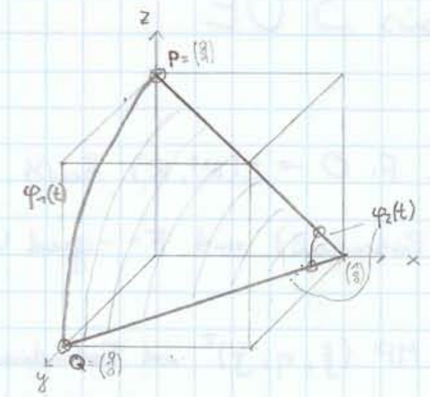
F Potentialfeld, d.h. $\exists U: O \to \mathbb{R}$ mit $F = -\operatorname{grad} U \Leftrightarrow F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad i = 1,2,3.$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

$$= \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3}, -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3 \partial x_1}, -\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = (0,0,0),$$

da die Diffbarkeit von F die 2-malige Diffbarkeit von U impliziert. $\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}$

b) <u>ges.:</u> Erklärung für $A_{\varphi_1} = A_{\varphi_2}$ (Bsp. 81) mithilfe des Satzes von Stokes.



<u>Satz von Stokes:</u>

- $O \subseteq \mathbb{R}^2$ offen; $T: O \to \mathbb{R}^3$ injektiv, C^1, rang $dT = 2$
- $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt; $\bar{G} \subseteq O$
- $P \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $T(\bar{G}) \subseteq P$
- $F: P \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ stet. diffb. Vektorfeld

   supp $F \circ T|_{\bar{G}} \subseteq G \cup \partial^\circ G \cup L$ mit $L \subseteq \partial G \setminus \partial^\circ G$ sodass $\lim_{\delta \to 0} \frac{\lambda_2(K_\delta(L))}{\delta} = 0$.

dann gilt

$$\int_M \operatorname{rot} F \, \nu_M \, d\mu_M = \int_{\partial^\circ M} F \, t_M \, d\mu_{\partial^\circ M} \quad \text{mit } M := T(G),\ \partial^\circ M = T(\partial^\circ G).$$

Sei $T: O := (-\pi, \pi) \times (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^3$

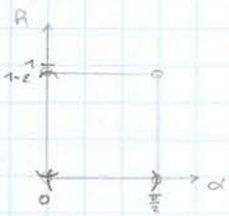
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ R \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \\ \sin \alpha \, (1-R) \\ \cos \alpha \, (1-R) \end{pmatrix} \quad \text{injektiv} \checkmark$$

$$dT\begin{pmatrix} \alpha \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos\alpha\,(1-R) & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha\,(1-R) & -\cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow T \in C^1$$

rang $dT = 2$, da $R \neq 1$

Sei $\varepsilon \in (0,1)$. Def.: $G = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, 1-\varepsilon) \Rightarrow \bar{G} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1-\varepsilon] \subseteq O$.

$$\partial^\circ G = \partial^c G = \overbrace{\{0\} \times (0, 1-\varepsilon)}^{=: \partial G_1} \cup \overbrace{\{\tfrac{\pi}{2}\} \times (0, 1-\varepsilon)}^{=: \partial G_2}$$
$$\cup \underbrace{(0, \tfrac{\pi}{2}) \times \{0\}}_{=: \partial G_3} \cup \underbrace{(0, \tfrac{\pi}{2}) \times \{1-\varepsilon\}}_{=: \partial^\circ G_4}.$$



Sei $P := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\} \Rightarrow T(\bar{G}) \subseteq P$

$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^T\} \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{m}{r^3}(x, y, z) \quad \text{stetig diffbar.} \checkmark$$

supp $F \circ T|_{\bar{\mathcal{G}}} \subseteq \bar{\mathcal{G}} \subseteq \mathcal{G} \cup \partial^\circ \mathcal{G} \cup L$ für $L := \{(0,0)^T, (0,1-\varepsilon)^T, (\frac{\pi}{2}, 1-\varepsilon)^T, (\frac{\pi}{2}, 0)^T\}$

L enthalten in endl. Vereinigung komp. Mengen $\Rightarrow$ Zusatzbed. erfüllt.

$M := T(\mathcal{G})$

$$\partial^\circ M := T(\partial^\circ \mathcal{G}) = T\Big(\bigcup_{i=1}^{4} \partial^\circ \mathcal{G}_i\Big) \overset{\partial^\circ\mathcal{G}_i \text{ disj.}}{=} \bigcup_{i=1}^{4} T(\partial^\circ \mathcal{G}_i) =: \bigcup_{i=1}^{4} \partial^\circ M_i$$

Mit ϕ_1, ϕ_2 aus Bsp. 81 gilt nun $\forall \varepsilon > 0$:

$$0 = \int_M \operatorname{rot} F \, \nu_M \, d\mu_M = \int_{\partial^\circ M} F t_M \, d\mu_{\partial^\circ M}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial^\circ M_i} F t_M \, d\mu_{\partial^\circ M_i}$$

$$= \int_{\substack{\phi_2((0,1-\varepsilon)) \\ \cup\, \phi_2((1+\varepsilon,2))}} F t_M \, d\mu_{\partial^\circ M_1 \cup \partial^\circ M_2} + \int_{\phi_1((0,\frac{\pi}{2}))} F t_M \, d\mu_{\partial^\circ M_3} + \int_{\varepsilon \cdot \phi_1((0,\frac{\pi}{2})) + \binom{1}{0}} F t_M \, d\mu_{\partial^\circ M_4} =: \circledast$$

$$\Rightarrow A_{\phi_1} + A_{\phi_2} = \int_{\phi_2((0,1)) \cup \phi_2((1,2))} F t_M \, d\mu_{\partial^\circ M_1 \cup \partial^\circ M_2} + \int_{\phi_1((0,\frac{\pi}{2}))} F t_M \, d\mu_{\partial^\circ M_3}$$

$$\overset{\text{HS der Diff.-I.-rechnung}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \circledast = 0$$

Bewegung eines Körpers K zerlegt in Bew. des Punktes $O \in K$ sowie Rotation um durch $O := (O_{x_1}, O_{x_2}, O_{x_3})$ verlaufende Achse mit Winkelgeschw. ω.

$\Rightarrow$ Momentangeschw. eines Pkt. $x \in K$:

$$v(t) = \underbrace{v_0(t)}_{\text{Mom.-Geschw. von } O} + \underbrace{\omega(t)}_{\text{Winkelgeschw.}} \times \underbrace{r(t)}_{\text{Vektor } \vec{Ox}}$$

85. ZZ: $\omega(t) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v(t)$

$$\operatorname{rot} v(t) = \operatorname{rot}\left(v_0(t) + \omega(t) \times r(t)\right)$$

$$\overset{\text{linear}}{=} \underbrace{\operatorname{rot} \underbrace{v_0(t)}_{\text{u.a. von } x}}_{=0} + \operatorname{rot}(\omega(t) \times r(t)) = \operatorname{rot}(\omega(t) \times r(t))$$

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix} \text{ u.a. von } x \text{ lt. Bsp. 84} \qquad r(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - O_{x_1} \\ x_2 - O_{x_2} \\ x_3 - O_{x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega \times r = \begin{pmatrix} \omega_2 r_3 - \omega_3 r_2 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ \omega_1 r_2 - \omega_2 r_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(\omega \times r) = \left(\frac{\partial(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3)}{\partial x_3}, \frac{\partial(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(\omega_1 r_2 - \omega_2 r_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial(\omega_3 r_1 - \omega_1 r_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(\omega_2 r_3 - \omega_3 r_2)}{\partial x_2} \right)$$

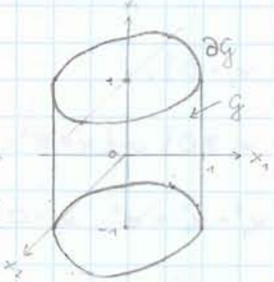
$$= (\omega_1 - (-\omega_1), \omega_2 - (-\omega_2), \omega_3 - (-\omega_3)) = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{rot} v(t) = \omega(t).$$

88. $G := \{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2<1, \ -1<x_3<1\}$

$F: \mathbb{R}^3 \to L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) : (x_1,x_2,x_3)^T \mapsto (2x_1, x_2^2, x_3^2)$

ZZ: $\int_{\partial^\circ G} F(y)\,\nu(y)\,d\mu(y) = 4\pi$ mit Satz von Gauß.



Satz von Gauß:

- G beschränkt, offen in $\mathbb{R}^3$
- $h: \overline{G}\to\mathbb{R}^3$ stetig, $h|_G \in C^1$

  supp $h \subseteq G \cup \partial^\circ G \cup L$ mit $L \subseteq \partial G \setminus \partial^\circ G$ sodass $\lim_{\delta\to 0} \frac{\lambda_3(K_\delta(L))}{\delta} = 0$
- $x \mapsto \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \in L_1(G,\lambda_3)$

  $h_i|_{\partial^\circ G} \in L_1(\partial^\circ G, \mu_{\partial^\circ G})$

dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} h(x)\, d\lambda_3(x) = \int_{\partial^\circ G} \nu(y)^T h(y)\, d\mu(y)$$

Sei nun $h := F^T|_{\overline G} \Rightarrow h \in C^1$.

supp $h \subseteq \overline G \overset{?}{=} G\cup\partial^\circ G \cup L$ für $L = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2=1\}\times\{-1,1\}$

L erfüllt Zusatzbed., da Vereinigung zweier 1-dim. MF.

$$dh\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (dF(x_1,x_2,x_3))^T = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2x_2&0\\0&0&2x_3\end{pmatrix} \cancel{\in L_1(G,\lambda_3)} \Rightarrow \text{Komponenten} \in L_1(G,\lambda_3)$$

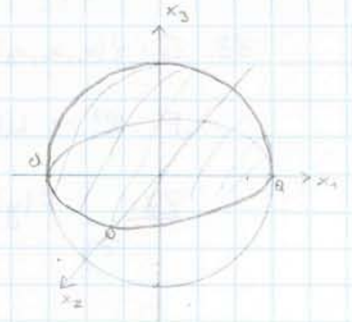
$\mu(\partial^\circ G) < \infty$ (Oberfläche des Zylinders beschr.) $\Rightarrow h_i|_{\partial^\circ G} \in L_1(\partial^\circ G,\mu)$.

$$\Rightarrow \int_{\partial^\circ G} \underbrace{F\nu}_{\in\mathbb{R}}\, d\mu = \int_{\partial^\circ G} \nu^T \underbrace{F^T}_{h}\, d\mu = \int_G \operatorname{div} h\, d\lambda_3 = 2\int_G (1+x_2+x_3)\, d\lambda_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$= 2\lambda_3(G) + 2\underbrace{\int_G x_2\, d\lambda_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{\| \text{ Zylinderkoo.}} + 2\underbrace{\int_G x_3\, d\lambda_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{\|} = 2\cdot\lambda_2(\pi)\cdot\lambda((-1,1)) = 4\pi.$$

$$\int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,1]} r\sin\alpha\cdot r\, d\lambda_3^{r,\alpha,h}\begin{pmatrix}r\\\alpha\\h\end{pmatrix} = 0 \qquad \int_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[-1,1]} h\cdot r\, d\lambda_3\begin{pmatrix}r\\\alpha\\h\end{pmatrix} = 0$$

89. $H := \{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 = a,\ x_3 > 0\}$ mit $a > 0$



$F(x_1,x_2,x_3)^T := (x_1 x_3^2,\ x_1^2 x_2 - x_3^3,\ 2x_1x_2 + x_2^2 x_3)$

ges.: $\int_H F(y)\,\nu(y)\,d\mu(y)$ mit $\nu(y) = a^{-1} y$.

Sei $G := \{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 < a^2 \wedge x_3 > 0\}$.

$\Rightarrow \partial G = \{ \text{—"—} : x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2 \wedge x_3 \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2 \leq a^2 \wedge x_3 = 0\}$

$\partial^\circ G = \partial^s G = H \cup N$ mit $N := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2 < a^2,\ x_3 = 0\}$

Def.: $R := F^T|_{\bar{G}}$. $\Rightarrow R \in C^1$

supp $R \subseteq \bar{G} \subseteq G \cup \partial^\circ G \cup L$ mit $L := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2 = a^2,\ x_3 = 0\}$

Zusatzbed. erfüllt, da L 1-dim. MF.

$$dR\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (dF(x_1,x_2,x_3))^T = \begin{pmatrix} x_3^2 & 0 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 & -3x_3^2 \\ 2x_2 & 2x_1+2x_2x_3 & x_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \in L_1(G,\lambda_3)$$

$\mu(\partial^\circ G) < \infty \Rightarrow R_i|_{\partial G} \in L_1(\partial^\circ G, \mu)$

Gaußscher Integralsatz $\Rightarrow \int_G \operatorname{div} R(x)\,d\lambda_3(x) = \int_{\partial^\circ G} \overbrace{\nu(y)^T R(y)}^{= R^T(y)\,\nu(y)}\,d\mu(y)$

$$\Rightarrow \int_H F(y)\,\nu(y)\,d\mu(y) = \int_G \operatorname{div} R(x)\,d\lambda_3(x) - \int_N F(y)\,\nu(y)\,d\mu(y)$$

$$\int_N F(y)\,\nu(y)\,d\mu(y) = \int_N (0,\ y_1^2 y_2,\ 2y_1y_2)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} d\mu(y)$$

$$= 2\int_N y_1 y_2\,d\mu(y) \underset{\uparrow}{=} 2\int_{(0,2\pi)} \overbrace{\cos\alpha \sin\alpha}^{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\,d\lambda(\alpha) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha\Big|_{\alpha=0}^{2\pi} = 0$$

$\phi : (0,2\pi) \to N$, $\alpha \mapsto \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ist Einb. für N mit $d\phi = \begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}$, $\phi(D) = N \setminus \phi(a)$.

$$\Rightarrow \int_H F(y)\,\nu(y)\,d\mu(y) = \int_G \operatorname{div} R(x)\,d\lambda_3(x) = \int_G x_1^2\ x_2^2\ x_3^2\ d\lambda_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Kugelkoo.}}{=} \int_{[0,a]\times[-\pi,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r^2 \cdot r^2\cos\theta\ d\lambda_3\begin{pmatrix}r\\ \alpha\\ \theta\end{pmatrix} \overset{\text{Fubini} \geq 0}{=} 2\pi \underbrace{\int_0^a r^4\,dr}_{\frac{a^5}{5}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta}_{\sin\frac{\pi}{2} = 1} = \frac{2a^5}{5}\pi.$$

91. $T: [0,2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\theta \\ \sin\alpha \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$M := T([0,2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}])$ ... obere Hälfte der Einheitssphäre

$F(x,y,z)^T := (1, xz, xy)$

ges.: $\int_M \operatorname{rot} F \, \nu \, d\mu_M$ auf 2 Arten.

•) direkte Methode

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (0, -y, +z)$$

$\nu(y) = y$, da $y \perp dT(T^{-1}(y))$, $\|y\| = 1$, y zeigt ins Äußere, y stetig auf M.

$$\Rightarrow \int_M \operatorname{rot} F \, \nu \, d\mu_M = \int_M (0, -y, z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} d\mu_M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= \int_M z^2 - y^2 \, d\mu_M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$= \int_{(0,2\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})} (\sin^2\theta - \sin^2\alpha \cos^2\theta) \cdot \underbrace{\sqrt{dT\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta\end{pmatrix}^T dT\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta\end{pmatrix}}}_{\cos^2\theta} \, d\lambda_2\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta\end{pmatrix} \overset{\text{Maple}}{=} 0.$$

•) Satz von Stokes

Voraussetzungen:

•) $O := (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \mathbb{R}^2$ offen

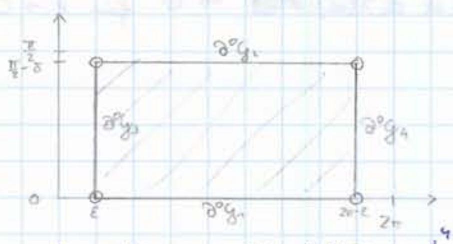
$T|_O : O \to \mathbb{R}^3$ injektiv, C^1

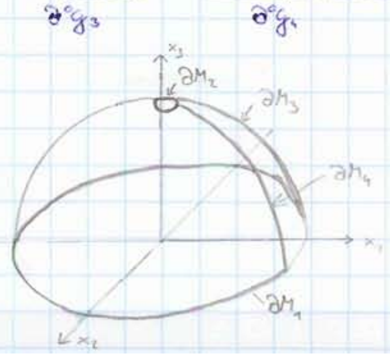
$$dT\begin{pmatrix}\alpha\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \cos\theta & -\cos\alpha \sin\theta \\ \cos\alpha \cos\theta & -\sin\alpha \sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang} dT = 2 \quad \text{da } \theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

•) $G := (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \times (0, \frac{\pi}{2} - \delta)$ mit $\varepsilon \in (0, \pi)$, $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \overline{G} = [\varepsilon - 2\pi - \varepsilon] \times [0, \frac{\pi}{2} - \delta] \subseteq O$

$$\partial^\circ G = \underbrace{(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)\times\{0\}}_{\partial^\circ G_1} \cup \underbrace{(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)\times\{\tfrac{\pi}{2}-\delta\}}_{\partial^\circ G_2} \cup \underbrace{\{\varepsilon\}\times(0, \tfrac{\pi}{2}-\varepsilon)}_{\partial^\circ G_3} \cup \underbrace{\{2\pi-\varepsilon\}\times(0, \tfrac{\pi}{2}-\varepsilon)}_{\partial^\circ G_4}$$





$$M := T(G), \quad \partial^\circ M = T(\partial^\circ G) = \bigcup_{i=1}^{4} \underbrace{T(\partial^\circ G_i)}_{=\partial^\circ M_i}$$

•) $P := \mathbb{R}^3, \; T(\bar{G}) \subseteq P$

•) F stetig diffb. Vektorfeld

zuzg. $F \circ T|_{\bar{G}} \subseteq \bar{G} \subseteq G \cup \partial^\circ G \cup L$ mit $L := \{(0,\varepsilon)^T, (0, 2\pi-\varepsilon)^T, (\frac{\pi}{2}-\delta, \varepsilon)^T, (\frac{\pi}{2}-\delta, 2\pi-\varepsilon)^T\}$

$$\Rightarrow \int_M \operatorname{rot} F \, \nu_M \, d\mu_M = \int_{\partial^\circ M} F \, t_M \, d\mu_{\partial^\circ M} = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial^\circ M_i} F \, t_M \, d\mu_{\partial^\circ M_i}$$

wobei $t_i := \frac{dT \, J\nu_i}{\| \cdots \|} \circ T^{-1}$ mit $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und ν_i stet. Normale an $\partial^\circ G_i$:

$$\Rightarrow \nu_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \nu_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \nu_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \nu_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$dT \, J\nu_1 = (dT)_1 \;\Rightarrow\; t_1 = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

$dT \, J\nu_2 = -(dT)_2 \;\Rightarrow\; t_2 := (\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$

$dT \, J\nu_3 = (dT)_3 \;\Rightarrow\; t_3 := (-\cos\alpha \sin\theta, -\sin\alpha \sin\theta, \cos\theta)$

$\Rightarrow t_4 = -t_3$

$$\cancel{\Rightarrow \int_{\partial^\circ M_1} F t_1 \, d\mu_{\partial^\circ M_1} = \int_{\partial^\circ G_1} F t_M \circ \phi(\alpha) \, d\lambda(\alpha) \text{ mit } \phi(\alpha) = T|_{\partial G_i}(\alpha, 0) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}$$
$$\cancel{d\phi = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$T|_{\partial^\circ G_1}$ ist Einbettung für $\partial^\circ M_1$ mit $dT|_{\partial^\circ G_1}(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)^T$

$$\Rightarrow \int_{\partial^\circ M_1} F t_1 \, d\mu_{\partial^\circ M_1} = \int_{\partial^\circ G_1} F t_1 \circ T|_{\partial^\circ G_1}(\alpha) \, d\lambda(\alpha)$$
$$= \int_{\partial^\circ G_1} (1, 0, \cos\alpha \sin\alpha) \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda(\alpha) = 0$$

analog:

$$\int_{\partial^\circ M_2} F t_2 \, d\mu_{\partial^\circ M_2} = \int_{\partial^\circ G_2} F t_2 \circ T|_{\partial^\circ G_2}(\alpha) \, d\lambda(\alpha)$$
$$= \int_{\partial^\circ G_2} \left(1, \cos\alpha \cos(\tfrac{\pi}{2}-\delta) \cdot \sin(\tfrac{\pi}{2}-\delta), \cos\alpha \cos^2(\tfrac{\pi}{2}-\delta) \sin\alpha\right) \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda(\alpha)$$
$$= \int_{(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)} \sin\alpha - \cos^2\alpha \cos(\tfrac{\pi}{2}-\delta) \sin(\tfrac{\pi}{2}-\delta) \, d\lambda(\alpha)$$
$$\xrightarrow{\delta \to 0} \int_{(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)} \sin\alpha \, d\lambda(\alpha) \to 0 \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

$$\int_{\partial^\circ M_3} F t_3 \, d\mu_{\partial^\circ M_3} = \int_{\partial^\circ \mathcal{Y}} F t_3 \circ T|_{\partial^\circ \mathcal{Y}_3} \, d\lambda$$

$$= \int_{(0,\frac{\pi}{2}-\delta)} (1, \cos\varepsilon \cos\theta \sin\theta, \cos\varepsilon \cos^2\theta \sin\varepsilon) \begin{pmatrix} \cos\varepsilon \sin\theta \\ \sin\varepsilon \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} d\lambda(\theta)$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_{(0,\frac{\pi}{2}-\delta)} (1, \cos\theta \sin\theta, 0) \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ -\cos\theta \end{pmatrix} d\lambda(\theta) \overset{\delta\to 0}{\to} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} \sin\theta \, d\lambda(\theta) = 1.$$

$$\int_{\partial^\circ M_4} F t_4 \, d\mu_{\partial^\circ M_4} = \int_{(0,\frac{\pi}{2}-\delta)} (1, \cos(2\pi-\varepsilon)\cos\theta \sin\theta, \cos(2\pi-\varepsilon)\cos^2\theta \sin(2\pi-\varepsilon)) \begin{pmatrix} -\cos 2\pi-\varepsilon \sin\theta \\ -\sin 2\pi-\varepsilon \sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix} d\lambda(\theta)$$

$$\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_{(0,\frac{\pi}{2}-\delta)} (1, \cos\theta \sin\theta, 0) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -\int_{(0,\frac{\pi}{2}-\delta)} \sin\theta \, d\lambda(\theta) \overset{\delta\to 0}{\to} -1.$$

~~Also $\int_M \operatorname{rot} F \, \nu_M \, d\mu_M = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial^\circ M_i} F t_i \, d\mu_{\partial^\circ M_i}$~~

Also: $$\int_{\Theta} \operatorname{rot} F \, \nu \, d\mu_{\Theta} = \lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \int_M \operatorname{rot} F \, \nu \, d\mu_{\Theta} = \lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \sum_{i=1}^4 \int_{\partial^\circ M_i} F t_i \, d\mu_{\partial^\circ M_i} = 0.$$

84. $K \subseteq \mathbb{R}^3$ starrer Körper, $O \in K$, Rotation des Körpers um Achse $O + \mathbb{R}d$ ($d \in \mathbb{R}^3$).

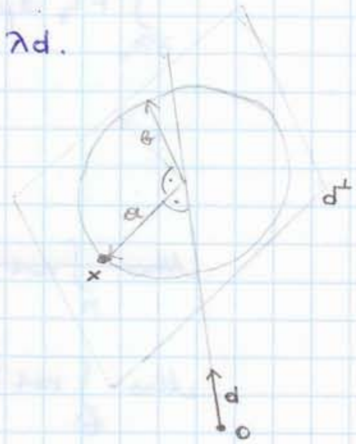
<u>ZZ:</u> $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$, sodass Momentangeschw. von $x = (\gamma d) \times r \quad \forall x \in K$, wobei

$r = \overrightarrow{Ox}$ und Momentangeschw. eines Punktes x zum Zeitpunkt t bei

Bewegung längs Kurve $\gamma(t) := \gamma'(t)$.

Sei $x \in K \setminus (O + \mathbb{R}d)$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}^3$, sodass $d^{\perp} = [a, b]$, $a \perp b$, $\|a\| = \|b\|$,

$\underset{\text{(Rechtsbasis)}}{\det(a, \cancel{B}^{\,b}, d) > 0}$ sowie $\overrightarrow{Ox} = 1 \cdot a + 0 \cdot b + \lambda d = a + \lambda d$.



Die Rotations~~figur~~kurve von x verläuft in einer Ebene,

die orthogonal zur Drehachse ist.

$r(t) = \overrightarrow{Ox}$ ist von t abhängig und ergibt sich als

$r(t) := a \cos\varphi(t) + b \sin\varphi(t) + \lambda d \quad$ mit $\varphi(t_0) = 0$

$\Rightarrow r(t_0) = a + \lambda d$

Durch Translation erhält man die Bahnkurve relativ zum Ursprung:

$\gamma(t) := \tau_{-O} \circ r(t) = r(t) - O$

$\Rightarrow \gamma'(t) = -a \sin\varphi(t) \frac{d\varphi}{dt}(t) + b \cos\varphi(t) \frac{d\varphi}{dt}(t)$

$$d \times r \overset{\text{linear}}{=} \underbrace{d \times \lambda d}_{0} + (d \times a)\cos\varphi(t) + (d \times b)\sin\varphi(t)$$
$$\overset{\circledast}{=} \|d\|\, b \cos\varphi(t) - \|d\|\, a \sin\varphi(t)$$

$\circledast$ beachte: $x, y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \det(x \times y, x, y) > 0$ (Vervollst. zu Rechtsbasis)
$x \perp y \Rightarrow \|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\|$

$\Rightarrow (\gamma d) \times r \overset{\text{lin.}}{=} \gamma(d \times r) = \gamma'(t) \Leftrightarrow \gamma := \frac{d\varphi}{dt}(t) \cdot \frac{1}{\|d\|} \qquad \forall x \in K \setminus (O + \mathbb{R}d)$.

Sei $x \in O + \mathbb{R}d$. $\Rightarrow \gamma'(t) = 0 = \gamma(d \times r) = \gamma(\underbrace{d \times \lambda d}_{=0})$.