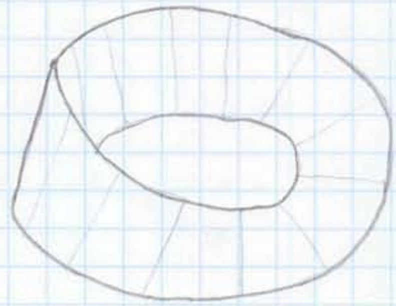
Analysis 3 UE



$\underline{IX}$, Z21. Sei $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+t\cos\frac{\alpha}{2})\cos\alpha \\ (1+t\cos\frac{\alpha}{2})\sin\alpha \\ t\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

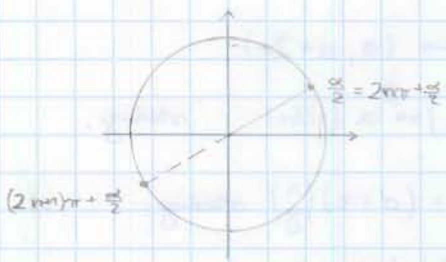
und setze $M := \phi((-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times\mathbb{R})$ („Möbiusband").

b) Sei $a \in \mathbb{R}$.

(i) $\underline{ZZ}$: $M = \phi((-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times[a,a+2\pi))$.

Sei $\beta\in\mathbb{R}$, dann $\exists!\alpha\in[a,a+2\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ mit $\beta = 2k\pi+\alpha$.

$$\Rightarrow \phi\begin{pmatrix}\beta\\t\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix}2k\pi+\alpha\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+t\cos(k\pi+\frac{\alpha}{2}))\cos(2k\pi+\alpha)\\(1+t\cos(k\pi+\frac{\alpha}{2}))\sin(2k\pi+\alpha)\\t\sin(k\pi+\frac{\alpha}{2})\end{pmatrix}$$



$$= \begin{cases} \begin{pmatrix}(1-t\cos\frac{\alpha}{2})\cos\alpha \\ \text{—— " ——}\ \sin\alpha \\ -t\sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix}\alpha\\-t\end{pmatrix} & k = 2n+1 \\ \phi\begin{pmatrix}\alpha\\t\end{pmatrix} & k = 2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi\begin{pmatrix}\beta\\t\end{pmatrix} \in \phi((-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\times[a,a+2\pi)) \quad \forall\beta\in\mathbb{R}.$$

(ii) $\underline{ZZ}$: $\phi|_{\underbrace{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(a,a+2\pi)}_{=:D}}$ ist Einbettung für M.

- D offen in $\mathbb{R}^2$

$$\phi|_D(D) = M\setminus\phi((-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\times\{a\}) = M\setminus\phi(\mathbb{R}\times\{a\}) = M\cap(\phi(\mathbb{R}\times\{a\}))^c$$

$\phi(\mathbb{R}\times\{a\})^c$ ist $\mathbb{R}^3$ ohne eine Gerade $\Rightarrow$ offen in $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ $\phi|_D(D)$ offen in M.

- $\phi|_D$ Homöomorphismus auf $\phi|_D(D)$?

  → surjektiv ✓

  → injektiv

  Sei $\phi\begin{pmatrix}t\\\alpha\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix}s\\\beta\end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{aligned}(1+t\cos\tfrac{\alpha}{2})\cos\alpha &= (1+s\cos\tfrac{\beta}{2})\cos\beta && (I)\\ (1+t\cos\tfrac{\alpha}{2})\sin\alpha &= (1+s\cos\tfrac{\beta}{2})\sin\beta && (II)\\ t\sin\tfrac{\alpha}{2} &= s\sin\tfrac{\beta}{2} && (III)\end{aligned}$$

$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}) \rightsquigarrow \underbrace{(1+t\cos\frac{\alpha}{2})^2}_{>0} = (\underbrace{1+s\cos\frac{\beta}{2}}_{>0})^2 \iff t\cos\frac{\alpha}{2} = s\cos\frac{\beta}{2} \quad (\mathrm{IV})$

$(\mathrm{I}),(\mathrm{II}),(\mathrm{IV}) \rightsquigarrow \begin{array}{l}\cos\alpha = \cos\beta \\ \sin\alpha = \sin\beta\end{array} \Rightarrow \alpha = \beta.$

$(\mathrm{III}) \rightsquigarrow s = t$

$\Rightarrow \phi|_D$ injektiv

-) $\phi|_D$ stetig ✓

-) $\phi|_D^{-1}$ stetig?

Betrachte zunächst $\psi(t,\alpha) := \pi(\phi(t,\alpha))$ mit $\pi(x,y,z)^T = (x,y)^T$

$$\Rightarrow \psi(t,\alpha) = \begin{pmatrix} (1+t\cos\frac{\alpha}{2})\cos\alpha \\ (1+t\cos\frac{\alpha}{2})\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Def.: $\tau: \psi(D) \to \mathbb{T}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\|(x,y)\|}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ stetig

Weiters $\exists\, \sigma: \mathbb{T} \to (a, a+2\pi)$

$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \mapsto \alpha \ (+2k\pi)$ stetig.

Somit ist $\psi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\sigma \circ \tau)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ stetig.

Für bel. $(x,y,z)^T \in \phi|_D(D)$ gilt nun

$\alpha = \psi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$t = z \cdot \left(\sin \frac{\psi^{-1}\binom{x}{y}}{2}\right)^{-1}$

$\Rightarrow \phi|_D^{-1}$ stetig, also $\phi|_D: D \to \phi|_D(D)$ homöomorph.

•) $$d\phi|_D\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha & -\sin\alpha - \frac{t}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha - t\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha & \cos\alpha - \frac{t}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + t\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \phi|_D \in C_1$.

•) $\operatorname{rg} d\phi|_D\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix} = 2 \quad \forall \begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix} \in D$?

Betrachte Unterdeterminanten:

$$0 = \cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha - \frac{t}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + t\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\alpha + \text{———} \cdot \text{———} + t\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}\underbrace{(1+t\cos\frac{\alpha}{2})}_{\neq 0}$$

$\iff \alpha = (2k+1)\pi$.

$d\phi|_D\begin{pmatrix} t \\ (2k+1)\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k\frac{t}{2} \\ 0 & -1 \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ überall voller Rang

Z22. Sei M das Möbiusband.

a) <u>ges.:</u> $\forall (x_0, y_0, z_0)^T \in M$ offene Umg. U sowie

$\Lambda_1 : U \to \mathbb{R}^3$ stetig, sodass $\Lambda_1(x,y,z)^T$ norm. NV an M in $(x,y,z)^T$
(lokale Normale)

Folgende Bed. müssen also erfüllt sein:

- Λ_1 stetig
- $\| \Lambda_1(x,y,z)^T \|_2 = 1$
- $\Lambda_1(x,y,z)^T \perp T_{(x,y,z)}$

Sei $(x_0, y_0, z_0)^T \in M$ und ϕ Einbettung wie in Z21b, mit $(x_0, y_0, z_0)^T \in \phi(D)$.

$$\Rightarrow T_{(x,y,z)} = \operatorname{ran} d\phi \begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \\ \cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{matrix}}_{=: d_1(t,\alpha)^T} & \underbrace{\begin{matrix} -\sin\alpha - \frac{t}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha - t\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \\ \cos\alpha - \frac{t}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + t\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \\ \frac{t}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \end{matrix}}_{=: d_2(t,\alpha)^T} \end{pmatrix} \right]$$

Soll gelten: $\Lambda_1(x,y,z)^T \perp \left[d_1\left(\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right), d_2\left(\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \right]$

Wähle also $\Lambda_1(x,y,z)^T := \frac{d_1 \times d_2}{\| d_1 \times d_2 \|}\left(\phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$.

$$(d_1 \times d_2)\begin{pmatrix} t \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + \frac{t}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha - t\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \\ -\frac{t}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + \frac{t}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha + t\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \\ \cos\frac{\alpha}{2} + t\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} d_1 \times d_2 \text{ stetig auf } \mathbb{R}^2 \\ \|\cdot\|_2 \text{ stetig} \\ \phi^{-1} \text{ stetig auf } \phi(D) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Lambda_1 : \begin{cases} U := \phi(D) \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \Lambda_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases} \text{ als ZS stet. Fkt. stetig.}$$

b) <u>ges.:</u> $\Lambda_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ stetig, sodass $\Lambda_2(\alpha)$ norm. Normalenvektor

an M im Punkt $\phi(0,\alpha)^T$. Vergl. $\Lambda_2(0)$ und $\Lambda_2(2\pi)$!

$$\Lambda_2(\alpha) := \frac{d_1 \times d_2}{\| d_1 \times d_2 \|}\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha \\ - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \\ \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

leistet das Gewünschte.

$$\Lambda_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_2(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\exists \tilde{\Lambda}: M \to \mathbb{R}^3$ stetig, sodass $\tilde{\Lambda}(x,y,z)^T$ norm. NV an M im Pkt. $(x,y,z)^T$?
(globale Normale)

Ann.: $\exists$ ein solches $\tilde{\Lambda}$.

$\tilde{\Lambda}$ ist stetig in $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, d.h. $\tilde{\Lambda}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \tilde{\Lambda}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M$ mit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Es gilt
$$\lim_{\alpha\to 0} \phi\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\lim_{\alpha\to 2\pi} \phi\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix}0\\2\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

aber:
$$\lim_{\alpha\to 0} \tilde{\Lambda}\left(\phi\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}\right) \overset{\circledast}{=} \lim_{\alpha\to 0} \pm \Lambda_2(\alpha) = \pm \Lambda_2(0)$$
$$\lim_{\alpha\to 2\pi} \tilde{\Lambda}\left(\phi\begin{pmatrix}0\\2\pi\end{pmatrix}\right) \overset{\circledast}{=} \lim_{\alpha\to 2\pi} \pm \Lambda_2(\alpha) = \pm \Lambda_2(2\pi)$$

$\circledast$ $\tilde{\Lambda}\big|_{\phi(0,[0,2\pi])} = \Lambda_2$ oder $-\Lambda_2$, da norm. NV bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt.

$\Rightarrow \nexists$ globale Normale.

Z23. Sei $r > 0$ fest, $\phi_r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$$\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}(1+r\cos\beta)\cos\alpha\\(1+r\cos\beta)\sin\alpha\\r\sin\beta\end{pmatrix}.$$

a) Für welche r ist $M := \phi_r(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ Mannigfaltigkeit ? („Torus")

(i) Zeige, dass M für $r \geq 1$ keine MF ist.

$$d\phi_r\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}-r\sin\beta\cos\alpha\\-r\sin\beta\sin\alpha\\r\cos\beta\end{matrix}}_{=: d_1(\beta,\alpha)} & \underbrace{\begin{matrix}-(1+r\cos\beta)\sin\alpha\\(1+r\cos\beta)\cos\alpha\\0\end{matrix}}_{=: d_2(\beta,\alpha)}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \nu\left(\phi\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}\right) := \frac{d_1\times d_2}{\|d_1\times d_2\|}\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} \text{ ist norm. NV in } \phi\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}$$

$$(d_1\times d_2)\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}(1+r\cos\beta)(-r)$$

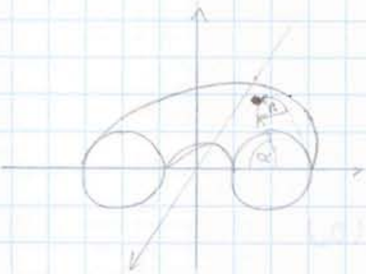
$$\Rightarrow \frac{d_1\times d_2}{\|d_1\times d_2\|}\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{cases}\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix} & \\ \nexists & 1+r\cos\beta = 0 \quad \cancel{\beta=(2k+1)\pi}\end{cases}$$

Für $r \geq 1$ $\exists \beta_0 \in \mathbb{R}$: $1 + r\cos\beta_0 = 0$. $\Rightarrow \lim_{\beta\to\beta_0} \nu\left(\phi_r\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta_0\\\sin\alpha\cos\beta_0\\\sin\beta_0\end{pmatrix} \neq \nu\left(\phi_r\begin{pmatrix}\beta_0\\\alpha\end{pmatrix}\right)$ $\nexists$.

(ii) <u>ZZ:</u> M ist MF für $r < 1$.

Wegen der Periodizität von Sinus und Kosinus gilt $M = \phi_r(\overbrace{[b, b+2\pi), [a, a+2\pi)}^{=D})$ für $a, b \in \mathbb{R}$ bel.

Zeige $\phi_r|_D$ ist Einbettung in M:



·) D offen

$$\phi_r|_D(D) = M \setminus \Big(\underbrace{\phi_r|_D(\{b\} \times [a, a+2\pi))}_{\text{Kreis im } \mathbb{R}^3} \cup \underbrace{\phi_r|_D([b, b+2\pi) \times \{a\})}_{\text{Kreis im } \mathbb{R}^3 \ \Rightarrow \text{ abg. in } \mathbb{R}^3} \Big) \text{ offen in } M.$$

·) $\phi_r|_D$ Homöomorphismus auf $\phi_r|_D(D)$

-) surjektiv ✓

-) injektiv

Sei $\phi\binom{\beta}{\alpha} = \phi\binom{\delta}{\gamma}$. $\Rightarrow (1 + r\cos\beta)^2 = (1 + r\cos\delta)^2$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \cos\beta = \cos\delta \\ \sin\beta = \sin\delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = \delta$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \cos\alpha = \cos\gamma \\ \sin\alpha = \sin\gamma \end{matrix}\right. \Rightarrow \alpha = \gamma$$

-) $\phi_r|_D \in C^1$

-) $\phi_r|_D^{-1}$ stetig?

$$\phi_r|_D^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan(x, y) \\ \arctan(\sqrt{x^2+y^2} - 1, z) \end{pmatrix} \begin{matrix} +2k\pi \\ +2l\pi \end{matrix}$$

mit $\arctan(x, y)$ vollständ. Umkehrfkt. des tan auf $\mathbb{T}$ (stetig).

·) $\operatorname{rg} d\phi\binom{\beta}{\alpha} = 2 \quad \forall \binom{\beta}{\alpha} \in D$ da $1 + r\cos\beta \neq 0 \quad \forall \beta$.

$\Rightarrow \phi_r|_D$ ist Einbettung, a, b bel. $\Rightarrow M$ ist MF.

b) $\exists$ globale Normale auf M?

c) ges.: Diffeomorphismus $\Psi: M \to \mathbb{T}\times\mathbb{T}$.

Sei: $\Psi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \right)$

•) ZZ: Ψ stetig diffbar.

~~Wähle~~ Sei: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M$. Wähle Einbettungen

$\phi_1: D_1 \to M$ wie in Bsp. a) mit $x \in \phi_1(D_1)$

$\phi_2: D_2 \to \mathbb{T}\times\mathbb{T}$ wie in Bsp. Z17 mit $\Psi(x) \in \phi_2(D_2)$

~~f~~ Ψ stetig, da $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0 \;\; \forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M$

Bleibt ZZ: $\phi_2^{-1} \circ \Psi \circ \phi_1 : (f \circ \phi_1)^{-1}(\phi_2(D_2)) \to D_2$ stetig diffbar.

$$\phi_2^{-1} \circ \Psi \circ \phi_1 \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \phi_2^{-1} \circ \Psi \begin{pmatrix} (1+r\cos\beta)\cos\alpha \\ \text{—}\,''\,\text{—}\;\sin\alpha \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= \phi_2^{-1}\left(\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} + 2k\pi$$

$\Rightarrow \phi_2^{-1} \circ \Psi \circ \phi_1$ ist st. diffbar als Fkt. von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Somit ist Ψ stetig diffbar.

•) ZZ: Ψ^{-1} stetig diffbar.

Man überzeugt sich leicht, dass

$\Psi^{-1}\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (1+ra)c \\ \text{—}\,''\,\text{—}\;d \\ rb \end{pmatrix}$ und Ψ^{-1} stetig ist.

Weiters gilt $(\phi_1^{-1} \circ \Psi^{-1} \circ \phi_2)\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = (\phi_2^{-1} \circ \Psi \circ \phi_1)^{-1}\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix} - 2k\pi$

$\Rightarrow \Psi^{-1}$ stetig diffbar.

Somit ist Ψ Diffeomorphismus.

Z24. Sei $n \in \mathbb{N}$, $GL(n,\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det x \neq 0\}$ „general linear group"

a) (i) <u>ZZ:</u> $GL(n,\mathbb{R})$ ist MF.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$
$$\underset{(a_{ij})}{A} \mapsto \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$
als ZS stetiger Fkt. stetig.

$\Rightarrow GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ist offen in $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Somit ist $id : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}) : x \mapsto x$ Einbettung und $GL(n,\mathbb{R})$ n^2-dimensionale MF im $\mathbb{R}^{n^2}$.

(ii) <u>ZZ:</u> Die Gruppenoperationen sind stetig diffbar.

- $(x\cdot y)_{ij} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} x_{is}\, y_{tj}$ $\qquad i,j \in \{1,\dots,n\}$
  ist als Polynomfkt. $\mathbb{R}^{n^2}\times\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ stetig diffbar.

- $(x^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det x}\det x^{ji}$ mit $x^{ji} = x$ ohne j. Zeile, i. Spalte
  ist stetig diffbar in allen Komponenten, da det als Polynomfkt. stet. diffb.

(iii) <u>ges.:</u> Oberflächenmaß μ.
$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\phi_j^{-1}(A\cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}\, d\lambda_{n^2}(s)$$
$$= \int_{id^{-1}(A)} \sqrt{\det id^2}\, d\lambda_{n^2}(s) = \lambda_{n^2}(A).$$

b) Sei $\nu(A) := \int_A \frac{1}{|\det x|^n}\, d\lambda_{n^2}(x)$ Maß auf $GL(n,\mathbb{R})$.

(i) <u>ZZ:</u> A kompakt $\Rightarrow \nu(A) < \infty$.

$\left.\begin{array}{l} A \text{ kompakt} \\ \det \text{ stetig}\end{array}\right\} \Rightarrow \det(A)$ kompakt in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow |\det(A)|$ kompakt in $\mathbb{R}^+\cup\{0\} \Rightarrow$ beschränkt und abgeschl.

$\Rightarrow \exists\, a := \min|\det A| > 0.$

$$\Rightarrow \nu(A) \leq \int_A \frac{1}{a^n}\, d\lambda_{n^2}(x) = \frac{1}{a^n}\underbrace{\lambda_{n^2}(A)}_{<\infty\text{, da } A \text{ kompakt} \Rightarrow \text{beschränkt.}} < \infty$$

(ii) ZZ: $\nu(y\cdot A) = \nu(A\cdot y) = \nu(A) \quad \forall\, y \in GL(n,\mathbb{R}),\ A \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ mb.

Sei zunächst $A = [a_{1:n,1}, b_{1:n,1}) \times \ldots \times [a_{1:n,n}, b_{1:n,n})$, d.h.

kart. Produkt von n $n\times 1$-Quadern $[a_{1:n,j}, b_{1:n,j}) := [a_{1j}, b_{1j}) \times \ldots \times [a_{nj}, b_{nj})$

$$\Rightarrow \lambda_{n^2}(y\cdot A) = \lambda_{n^2}\Big(y \cdot \prod_{j=1}^{n} [a_{1:n,j}, b_{1:n,j})\Big)$$
$$\overset{\circledast}{=} \prod_{j=1}^{n} \lambda_{n}\big(y\cdot [a_{1:n,j}, b_{1:n,j})\big)$$
$$= \prod_{j=1}^{n} |\det y|\ \lambda_n\big([a_{1:n,j}, b_{1:n,j})\big)$$
$$= |\det y|^n\ \lambda_{n^2}(A)$$

$$\circledast\quad y\cdot x = y\,\big(x_{1:n,1} \,|\, \ldots \,|\, x_{1:n,n}\big) = \big(y\cdot x_{1:n,1} \,|\, \ldots \,|\, y\cdot x_{1:n,n}\big)$$

Da die halboffenen Quader Erzeuger der n^2-dim. Borelmengen sind, gilt

$$\lambda_{n^2}(y\cdot A) = |\det y|^n\ \lambda_{n^2}(A) \qquad \forall A \subseteq GL(n,\mathbb{R}) \text{ mb.}$$

$$\Rightarrow \nu(y\cdot A) = \int_{y\cdot A} \frac{1}{|\det x|^n}\, d\lambda_{n^2}(x) \overset{\text{Trafosatz}}{=} \int_A \frac{|\det y|^n}{\underbrace{|\det yx|^n}_{|\det y|^n\,|\det x|^n}}\, d\lambda_{n^2}(x) = \nu(A).$$

Für die zweite Äquivalenz zeige zunächst $\nu(A^T) = \nu(A)$.

Die Transposition als Abbildung $\pi: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ ist nichts anderes als eine Permutation der Komponenten.

$\Rightarrow\ \cdot^T = \pi|_{GL(n,\mathbb{R})}$ ist bij. lin. Abb.

$$\Rightarrow \nu(A^T) = \int_{A^T} \frac{1}{|\det x|^n}\, d\lambda_{n^2}(x) = \int_A \frac{\overbrace{|\det \pi|}^{1}}{\underbrace{|\det x^T|^n}_{|\det x|^n}}\, d\lambda_{n^2}(x) = \nu(A).$$

Nun folgt sofort

$$\nu(A\cdot y) = \nu\big((A\cdot y)^T\big) = \nu(y^T\cdot A^T) = \nu(A^T) = \nu(A).$$

(iii) ges.: $y \in GL(n,\mathbb{R})$, $A \subseteq GL(n,\mathbb{R})$ mit $\nu(A) > 0$, sodass $y\cdot A \neq A\cdot y$.

Seien $n := 2$, $y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A := \{x \in GL(n,\mathbb{R}) : x_{11} > 0,\ x_{22} < 0,\ |\det x| \leq 1\}$

$\Rightarrow \nu(A) \geq \lambda_4(A) > 0.$

aber $Ay \neq yA$, da $Ay \subseteq \{x \in GL(n,\mathbb{R}) : x_{11} > 0\}$ (Spaltenvert.)

$yA \subseteq \{x \in GL(n,\mathbb{R}) : x_{11} < 0\}$ (Zeilenvert.)

Z25. Sei $\mathcal{A}(2,\mathbb{R}) := \{ x \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det x \neq 0,\ (0,1)\cdot x = (0,1) \}$ „affine group“

$$= \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\}$$

a) Ges.: $\mu(\mathcal{A}(2,\mathbb{R}))$

$$\mu(\mathcal{A}(2,\mathbb{R})) = \lambda_4(\mathcal{A}(2,\mathbb{R})) = \lambda_4(\mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\}) = 0.$$

b)(i) ZZ: $\mathcal{A}(2,\mathbb{R})$ ist MF.

$$\iota : \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}(2,\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist Einbettung.}$$

(ii) ZZ: Gruppenoperationen stetig diffbar

•) $$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} y_{11} & x_{11} y_{12} + x_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist stetig diffbar, da $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} x_{11} y_{11} \\ x_{11} y_{12} + x_{12} \end{pmatrix}$ stetig diffbar.

•) $$x^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det x}_{x_{11}}} \begin{pmatrix} 1 & -x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{11}} & -\frac{x_{12}}{x_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

stetig diffbar, da $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{11}} \\ -\frac{x_{12}}{x_{11}} \end{pmatrix}$ stetig diffbar auf $\mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$.

(iii) ges.: Oberflächenmaß $\tilde{\mu}$

$$\tilde{\mu}(A) = \int_{\iota^{-1}(A)} \sqrt{\det \underbrace{d\iota(s)^T d\iota(s)}_{E}}\, d\lambda_2(s) = \lambda_2(\iota^{-1}(A)).$$

c) Def. Maße

$$\mu_e(A) := \int_A \frac{1}{\pi_{11}(x)^2}\, d\tilde{\mu}(x), \quad \mu_r(A) := \int_A \frac{1}{|\pi_{11}(x)|}\, d\tilde{\mu}(x)$$

mit $\pi_{i,j}(x) = x_{ij}$ für $x = (x_{ij}) \in \mathcal{A}(2,\mathbb{R})$

(i) ZZ: $\mu_e(y\cdot A) = \mu_e(A) \quad \forall y \in \mathcal{A}(2,\mathbb{R}),\ A \subseteq \mathcal{A}(2,\mathbb{R})$ mb.

$$\mu_e(y\cdot A) = \int_{y\cdot A} \frac{1}{\pi_{11}(x)^2}\, d\underbrace{\tilde{\mu}(x)}_{\lambda_2(\iota^{-1}(x))} = \int_{\iota^{-1}(y\cdot A)} \frac{1}{\pi_{11}(\iota(x))^2}\, d\lambda_2(x)$$

$$\boxed{\iota^{-1}(y\cdot A) = \begin{pmatrix} y_{11} & \pi_{11}(A) \\ y_{11} & \pi_{12}(A) + y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ 0 & y_{11} \end{pmatrix} \iota^{-1}(A) + \begin{pmatrix} 0 \\ y_{12} \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \mu_e(y\cdot A) = \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{\cancel{y_{11}^2}}{\underbrace{\pi_{11}(\iota(y\cdot x))^2}_{(\cancel{y_{11}} x_{11})^2}}\, d\lambda_2(x) = \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{1}{\pi_{11}(x)^2}\, d\lambda_2(x) = \mu_e(A).$$

(ii) $\underline{\text{ZZ:}}$ $\mu_r(A\cdot y) = \mu_r(A) \quad \forall y \in \mathcal{A}(2,\mathbb{R}),\ A \subseteq \mathcal{A}(2,\mathbb{R})$ mb.

$$\mu_r(A\cdot y) = \int_{A\cdot y} \frac{1}{|\pi_{11}(x)|}\, d\tilde{\mu}(x) = \int_{\iota^{-1}(A\cdot y)} \frac{1}{|\pi_{11}(\iota(x))|}\, d\lambda_2(x)$$

$$\iota^{-1}(A\cdot y) = \begin{pmatrix} \pi_{11}(A)\, y_{11} \\ \pi_{12}(A)\, y_{11} + y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 \\ y_{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{11}(A) \\ \pi_{12}(A) \end{pmatrix} = y^T \cdot \iota^{-1}(A)$$

$$\Rightarrow \mu_r(A\cdot y) = \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{|y_{11}|}{\underbrace{|\pi_{11}(\iota(y^T x))|}_{|x_{11} y_{11}|}}\, d\lambda_2(x) = \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{1}{|\pi_{11}(x)|}\, d\lambda_2(x) = \mu_r(A).$$

d) (i) $\underline{\text{ges.:}}$ $\Delta_r : \mathcal{A}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, sodass $\mu_r(y^{-1}\cdot A) = \Delta_r(y)\, \mu_r(A)$

$\forall y \in \mathcal{A}(2,\mathbb{R}),\ A \subseteq \mathcal{A}(2,\mathbb{R})$ mb.

$$\mu_r(y^{-1}\cdot A) = \int_{y^{-1}\cdot A} \frac{1}{|\pi_{11}(x)|}\, d\tilde{\mu}(x) = \int_{\iota^{-1}(y^{-1} A)} \frac{1}{|\pi_{11}(\iota(x))|}\, d\lambda_2(x)$$

$$\iota^{-1}(y^{-1}\cdot A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_{11}} \end{pmatrix} \iota^{-1}(A) + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{y_{12}}{y_{11}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mu_r(y^{-1}\cdot A) = \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{1}{|\pi_{11}(\iota(y^{-1} x))|}\, \frac{1}{y_{11}^2}\, d\lambda_2(x)$$

$$= \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{|y_{11}|}{|x_{11}|}\, \frac{1}{|y_{11}|^2}\, d\lambda_2(x) = \overbrace{\left(\frac{1}{|\det y|}\right)}^{=:\,\Delta_r(y)} \mu_r(A)$$

$\underline{\text{ZZ:}}$ $\Delta_r(y)$ ist Homomorphismus von $(\mathcal{A}(2,\mathbb{R}),\cdot)$ auf $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$

$$\Delta_r(x\cdot y) = \frac{1}{\underbrace{|\det xy|}_{\neq 0}} = \frac{1}{|\det x|} \cdot \frac{1}{|\det y|} = \Delta_r(x)\cdot \Delta_r(y) \neq 0.$$

(ii) $\underline{\text{ges.:}}$ $\Delta_e : \mathcal{A}(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, sodass $\mu_e(A\cdot y^{-1}) = \Delta_e(y)\cdot \mu_e(A) \quad \forall \ldots$

$$\mu_e(A\cdot y^{-1}) = \int_{A y^{-1}} \frac{1}{(\pi_{11}(x))^2}\, d\tilde{\mu}(x) = \int_{\iota^{-1}(A\cdot y^{-1})} \frac{1}{(\pi_{11}(\iota(x)))^2}\, d\lambda_2(x)$$

$$\overset{\iota^{-1}(Ay^{-1}) = (y^{-1})^T \iota^{-1}(A)}{=} \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{1}{\underbrace{\pi_{11}((y^{-1})^T\cdot x)^2}_{\left(\frac{x_{11}}{y_{11}}\right)^2}}\, \underbrace{|\det (y^{-1})^T|}_{=|\det y^{-1}| = \frac{1}{|y_{11}|}}\, d\lambda_2(x)$$

$$= \int_{\iota^{-1}(A)} \frac{|y_{11}|^2}{x_{11}^2}\, \frac{1}{|y_{11}|}\, d\lambda_2(x) = \overbrace{(|\det y|)}^{=:\,\Delta_e(y)}\, \mu_e(A)$$

$\underline{\text{ZZ:}}$ $\Delta_e(y)$ ist Homomorphismus auf $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$

$$\Delta_e(x\cdot y) = |\det xy| = |\det x|\, |\det y| = \Delta_e(x)\cdot \Delta_e(y) \neq 0.$$

Sei P Punkt im $\mathbb{R}^3$.

•) ~~B~~Geradlinige Bewegung $\overline{PQ}$ der Länge ℓ unter Einfluss einer konst. Kraft

$F=(F_1, F_2, F_3) \Rightarrow$ Arbeit $A := \|F\| \, \ell \cos\vartheta$ mit ϑ Winkel zw. F und $\overrightarrow{PQ}$.

•) Bewegung entlang einer Kurve $M := \phi((a,b))$ mit $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, unter Einfluss eines Kraftfeldes $F: M \to L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ verr. Arbeit $A := \int_M F t \, d\mu$ mit $t(x) := \dfrac{\phi'(\phi^{-1}(x))}{\|\phi'(\phi^{-1}(x))\|}$ norm. NV an M im Punkt x

und μ Oberflächenmaß von M

80. $$A = \int_{\phi((a,b))} F(x)\, t(x) \, d\mu(x) = \int_{\phi((a,b))} F(x) \frac{\phi'(\phi^{-1}(x))}{\|\phi'(\phi^{-1}(x))\|} \, d\mu(x)$$

Wegen $$\mu(B) = \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\det d\phi(t)^T \, d\phi(t)} \, d\lambda(t)$$

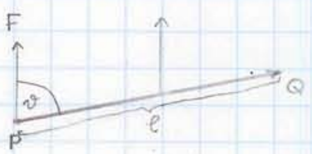
$$= \int_{\phi^{-1}(B)} \sqrt{\phi'(t)^T \phi'(t)} \, d\lambda(t) = \int_{\phi^{-1}(B)} \|\phi'(t)\| \, d\lambda(t)$$

folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym

$$A = \int_{(a,b)} \frac{F(\phi(t)) \, \phi'(\phi^{-1}(\phi(t)))}{\|\phi'(\phi^{-1}(\phi(t)))\|} \, \|\phi'(t)\| \, d\lambda(t) = \int_a^b F(\phi(t)) \, \phi'(t) \, dt.$$

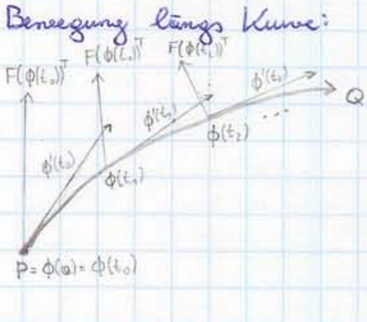
Geometrische Motivation:

Geradlinige Bewegung:



$$A = \|F\| \overbrace{\|\overrightarrow{PQ}\|}^{\ell} \cos\vartheta = \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ} \quad \text{(inn. Prod.)}$$

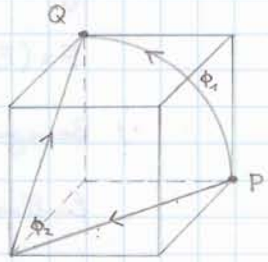
Bewegung längs Kurve:



$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{F(\phi(t_i)) \, \phi'(t_i)}_{F(\phi(t_i))^T \circ \, \phi'(t_i)} \, \lambda(t_{i+1} - t_i) \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b F(\phi(t)) \, \phi'(t) \, dt.$$

81. Sei $(\xi, \eta, \zeta) := (0,0,0)$, Kraftfeld $F(x,y,z) = \frac{m}{r^3}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}(x,y,z)$

<u>ges.:</u> Arbeit, die bei Verschiebung von $P := (0,0,1)^T$ nach $Q := (0,1,0)^T$ entlang



a) $\phi_1(t) := (0, \sin t, \cos t)^T \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow F(\phi_1(t)) = \frac{1}{1^3}(0, \sin t, \cos t)$$

$$A_{\phi_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\phi_1(t))\, \phi'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, \sin t, \cos t) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt = 0.$$

b) $\phi_2(t) := \begin{cases} (t, 0, 1-t)^T & t \in [0,1] \\ (2-t, t-1, 0)^T & t \in [1,2] \end{cases}$

$$A_{\phi_2} = \int_0^1 F(\phi_2(t))\, \phi_2'(t)\, dt + \int_1^2 F(\phi_2(t))\, \phi_2'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+(1-t)^2}^3}(t, 0, 1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{(2-t)^2+(t-1)^2}^3}(2-t, t-1, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2t-1}{(1-2t+2t^2)^{3/2}}\, dt + \int_1^2 \frac{2t-3}{(2t^2-6t+5)^{3/2}}$$

$$\left| \begin{matrix} 1-2t+2t^2 = u \\ -2+4t\, dt = du \end{matrix} \right| \qquad \left| \begin{matrix} 2t^2-6t+5 = v \\ 4t-6\, dt = dv \end{matrix} \right|$$

$$= \int_1^1 \frac{\cancel{2t-1}}{u^{3/2}} \frac{1}{2\cancel{(2t-1)}}\, du + \int_1^1 \frac{\cancel{2t-3}}{v^{3/2}} \frac{1}{2\cancel{(2t-3)}}\, dv = 0.$$

Gas ändert Zustand von $P=(p_0, V_0)$ zu $Q=(p_1, V_1)$ längs einer Kurve

$\gamma(t)$ im $(\overset{\text{Druck}}{p}, \overset{\text{Volumen}}{V})$-Koordinatensystem

$\Rightarrow$ absorbierte Wärmeenergie $Q := \int_M F t \, d\mu$, wobei $M := \gamma([0,1])$, t norm. NV

und $F = \left(\frac{\overset{\text{spez. } \cancel{\text{Volumen}} \text{ Wärme}}{c_V}}{R} V, \frac{\overset{\text{spez. Wärme}}{c_p}}{\underset{\text{Gaskonstante}}{R}} p \right)$.

86. Sei $R := 1$, $c_V := 1$, $c_p := 2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

<u>ges.:</u> Q

$$Q = \int_M F t \, d\mu = \int_0^{2\pi} \underbrace{F(\gamma(t))}_{F(\gamma_1(t), 2\cdot\gamma_2(t))} \gamma'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} (2+\sin t, 4+2\cos t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos t + \cos t \sin t - 4 \sin t \, dt$$

$$= \underbrace{2 \sin t \Big|_0^{2\pi}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2} \cos^2 t \Big|_0^{2\pi}}_{0} + \underbrace{4 \cos t \Big|_0^{2\pi}}_{0} = 0.$$