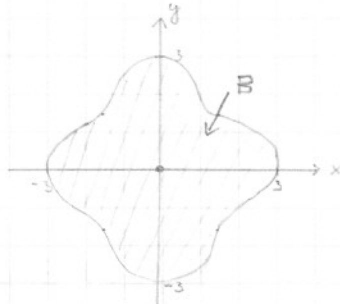
20.5.10

# Analysis 3 UE

VIII,

60. <u>ges.:</u> Fläche der von der Kurve $\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^3 = 9(x^4+y^4)\}$ beschränkten Fläche.




Def. $B := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^3 \leq 9(x^4+y^4)\}$

Transformation in Polarkoordinaten:

$$T\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad r \in [0,\infty),\ \varphi \in [0,2\pi]$$

$$\Rightarrow (x^2+y^2)^3 \leq 9(x^4+y^4) \Leftrightarrow (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^3 \leq 9(r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad r^6 \leq 9r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \quad r \leq 3\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$$

$$\Rightarrow F(B) = \int_F 1 \, d\lambda_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{[0,3\sqrt{\cdots}]\times[0,2\pi]} \overbrace{|\det dT|}^{r} \, d\lambda_2\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,3\sqrt{\cdots}]} r \, d\lambda(r)\, d\lambda(\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\, d\varphi = \ldots$$

$$= \frac{9}{2}\left[\frac{\sin\varphi\cos^3\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{4} + \frac{3\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{2\pi}$$

$$= \frac{27\cdot 2\pi}{8} = \frac{27}{4}\pi.$$

61. Seien $a, b, c > 0$. $F := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} + (\frac{z}{c})^{2/3} = 1\}$.

<u>ges.:</u> Volumen des von F begrenzten Körpers.

Def. $B := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (\frac{x}{a})^{2/3} + (\frac{y}{b})^{2/3} + (\frac{z}{c})^{2/3} \leq 1\}$.

Wissen aus Bsp. 52:

$$T: R := (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ y = 0\} =: X$$

$$(r, \alpha, \theta)^T \mapsto \begin{pmatrix} a\, r \cos\alpha \cos\theta \\ b\, r \sin\alpha \cos\theta \\ c\, r \sin\theta \end{pmatrix} \text{ ist Diffeom.}$$

(i) Zeige: $T'(r,\alpha,\theta)^T = (a r \cos^3\alpha \cos^3\theta,\ b r \sin^3\alpha \cos^3\theta,\ c r \sin^3\theta)$

ist Diffeom. auf passendem Def.-Bereich.

•) $T$ bijektiv auf $X$, $x \mapsto x^3$ bij. auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $T^3$ bij. auf $X$ $\Rightarrow$ $T'$ Bijektion von $R$ auf $X$.

•)
$$dT'(r,\alpha,\theta)^T = \begin{pmatrix} a \cos^3\alpha \cos^3\theta & -3ar\cos^2\alpha \sin\alpha \cos^3\theta & -3ar\cos^3\alpha \cancel{\sin}\cos^2\theta \sin\theta \\ b \sin^3\alpha \cos^3\theta & 3br\sin^2\alpha \cos\alpha \cos^3\theta & -3br\sin^3\alpha \cos^2\theta \sin\theta \\ c \sin^3\theta & 0 & 3cr\sin^2\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

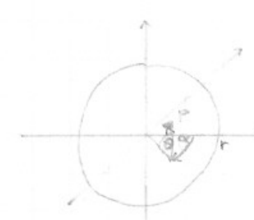
$\Rightarrow \det dT'(r,\alpha,\theta)^T = 9abc\, r^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cos^5\theta \sin^2\theta.$

$\det dT' \neq 0$ für $r > 0 \wedge \alpha \neq k\frac{\pi}{2} \wedge \theta \neq l\frac{\pi}{2}$ $\quad k, l \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow T': R' := (0,\infty) \times (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \dot\cup (-\frac{\pi}{2}, 0) \dot\cup (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}) \to T'(R')$

ist stetig diffbar mit (lt. HS) stetig diffbarer Umkehrfkt., also Diffeom.

Bestimme $T'(R')$:




Folgende Mengen sind <u>nicht</u> im Bildraum enthalten:

$T'(\{0\} \times [-\pi,\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = (0,0,0)$

$T'([0,\infty) \times \{-\pi\} \cup \{0\} \cup \{\pi\} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ $\quad$ ($x_1$-$x_3$-Ebene)

$T'([0,\infty) \times \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad$ ($x_2$-$x_3$-Ebene)

$T'([0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ $\quad$ ($x_3$-Achse)

$T'([0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ $\quad$ ($x_1$-$x_2$-Ebene)

$\Rightarrow X' := T'(R') = \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\})$.

•) $T'$ ist also Diffeom. von $R'$ auf $X'$ mit

$\lambda_3([0,\infty)\times[-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus R')=0$ bzw.

$\lambda_3(\mathbb{R}^3\setminus X')=0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} f\, d\lambda_3 = \int_{R'} f\circ T\, |\det dT|\, d\lambda_3$ für $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ messbar.

•) Berechne $V(B)$:

$(x,y,z)\in B \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\le 1$

$\Leftrightarrow r^{2/3}(\cos^2\alpha\cos^2\theta+\sin^2\alpha\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^{2/3}\le 1$

$\Leftrightarrow r\le 1.$

$$\Rightarrow V(B)=\int_B 1\, d\lambda_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \int_{[0,1]\times[-\pi,\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} 9abc\, r^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\cos^5\theta\sin^2\theta\, d\lambda_3\begin{pmatrix}r\\\alpha\\\theta\end{pmatrix}$$

$$= 9abc\int_0^1 r^2\,dr\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\alpha\sin^2\alpha\,d\alpha\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{4}{35}\pi abc.$$

63. $S:=(x_S,y_S)$ ist Schwerpunkt von $B$ g.d.w.

Drehmoment von $B$ bzgl. $x$-Achse = Masse von $B$ · Radius von $S$ um $x$-Achse

d.h. $M_x(B)=F(B)\cdot y_S \Leftrightarrow y_S=\frac{1}{F(B)}M_x(B)=\frac{1}{F(B)}\int_B y\, d\lambda_2$

analog: $x_S=\frac{1}{F(B)}\int_B x\, d\lambda_2.$

64. <u>ges.:</u> Schwerpunkt der Flächen.

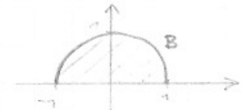
a) $B:=\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$

$$M_y(B)=\int_B x\, d\lambda_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2\cos\varphi\, d\lambda_2\begin{pmatrix}r\\\varphi\end{pmatrix}=\int_0^1 r^2\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{\sin\varphi|_0^{2\pi}=0}\Big)dr=0$$

$$M_x(B)=\int_B y\, d\lambda_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2\sin\varphi\, d\lambda_2\begin{pmatrix}r\\\varphi\end{pmatrix}=\int_0^1 r^2\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi}_{-\cos\varphi|_0^{2\pi}=0}\Big)dr=0$$

$\Rightarrow S=(0,0).$

b) $B := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$




$(x,y)^T \in B \Leftrightarrow (r,\varphi)^T \in [0,1] \times [0,\pi]$

$$M_y(B) = \int_B x \, d\lambda_2\binom{x}{y} = \int_{[0,1]\times[0,\pi]} r^2 \cos\varphi \, d\binom{r}{\varphi}$$

$$= \int_0^1 r^2 \underbrace{\left(\int_0^\pi \cos\varphi \, d\varphi\right)}_{\sin\varphi \big|_0^\pi = 0} dr = 0$$

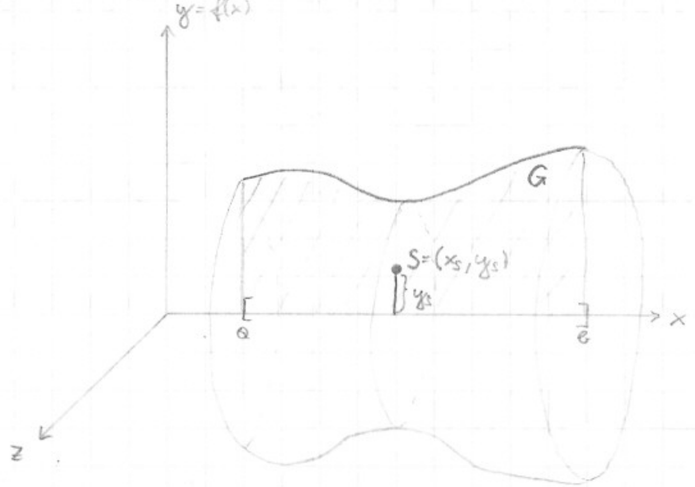
$$M_x(B) = \int_B y \, d\lambda_2\binom{x}{y} = \int_{[0,1]\times[0,\pi]} r^2 \sin\varphi \, d\binom{r}{\varphi} = \int_0^1 r^2 \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi\right)}_{= -\cos\varphi \big|_0^\pi = 2} dr = \frac{2}{3}.$$

$$F(B) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$$

c)

65. Sei $G := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x),\ a \leq x \leq b\}$.

**ZZ:** Das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation von $G$ um die x-Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus der Fläche von $G$ und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt von $G$ bei der Drehung beschreibt; d.h. $V(B_G) = F(G) \cdot 2 y_S \pi$




$$F(G) \cdot 2 y_S \pi = F(G) \cdot 2 \frac{1}{F(G)} \int_G y \, d\lambda_2 \binom{x}{y} \pi$$

$$= 2\pi \int_{[a,b] \times [0, f(x)]} y \, d\lambda_2 \binom{x}{y} = 2\pi \int_{[a,b]} \underbrace{\left( \int_{[0,f(x)]} y \, d\lambda(y) \right)}_{\frac{f^2(x)}{2}} d\lambda(x)$$

$$= \pi \int_{[a,b]} f^2 \, d\lambda = V(B_G) \text{ lt. Bsp. 57}$$

67) Sei $B$ Drehkegel der Höhe $h$ mit Grundflächenradius $R$, homogen mit Masse belegt (Massendichte 1).

<u>ges.</u>: Anziehungskraft, die auf $A := (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, h)$ wirkt.

~~(i) Zeige, dass $F_x$, $F_y$, $F_z$ existieren und endlich sind.~~

~~Betrachte o.B.d.A $F_x$ und ein $A = (\xi, \eta, \zeta) \in B$, d.g.~~

$$\cancel{F_x := \int_B \frac{x-\xi}{r^3}\, d\lambda_3 = \int_{B\setminus A} \frac{x-\xi}{r^3}\, d\lambda_3 \quad \text{mit } r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},}$$

~~da der Integrand für $(x, y, z) = A$ nicht definiert ist.~~

~~Er bleibt aber auch hinreichend nahe an $A$ beschränkt, da~~

Beobachtung für $A = (\xi, \eta, \zeta) \in B$:

Der Integrand ist für $(x, y, z) = A$ nicht definiert, da

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2} = 0$$

Koordinatentransformation:

$$T: (0,\infty) \times (-\pi, \pi) \times (0,1) \to \left(\mathbb{R}^2 \times (0, h)\right) \setminus \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0,\ y = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi\,(1-s) \\ \rho \sin\varphi\,(1-s) \\ h \cdot s \end{pmatrix}$$

•) $T$ bijektiv ✓

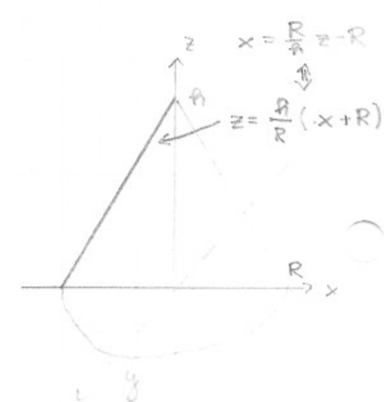
•) $$dT(\rho, \varphi, s)^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,(1-s) & -\rho \sin\varphi\,(1-s) & -\rho\cos\varphi \\ \sin\varphi\,(1-s) & \rho\cos\varphi\,(1-s) & -\rho\sin\varphi \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T \in C_1$

•) $\det dT(\rho, \varphi, s)^T = h\left(\rho\cos^2\varphi\,(1-s)^2 + \rho \sin^2\varphi\,(1-s)^2\right) = h\rho\,(1-s)^2 > 0$

$\Rightarrow T^{-1} \in C_1$

also $T$ Diffeomorphismus.




$$(x,y,z) \in B \iff x^2 + y^2 \leq R^2 \left(\frac{z}{h} - 1\right)^2 \ \wedge\ z \geq 0$$

$$\iff \rho^2 \cancel{(1-s)^2} \leq R^2 \cancel{(s-1)^2} \quad h \cdot s \geq 0$$

$$\iff \rho \leq R.$$

Sei nun $(\xi, \eta, \zeta) := (0, 0, h)$.

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2} = \sqrt{\rho^2 (1-s)^2 + (hs-h)^2} = |1-s| \sqrt{\rho^2 + h^2}$$

$$\Rightarrow F_x = \int_B \frac{x}{r^3} \, d\lambda_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_{[0,R]\times[-\pi,\pi]\times[0,1]} \frac{\rho \cos\varphi \cancel{(1-s)}}{(\rho^2+h^2)^{3/2} \cancel{(1-s)^3}} \, h \rho \cancel{(1-s)^2} \, d\lambda \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \int_{[0,R]} \int_{[0,1]} \frac{\rho^2 h}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \underbrace{\left( \int_{[-\pi,\pi]} \cos\varphi \, d\lambda(\varphi) \right)}_{=0} d\lambda(s) \, d\lambda(\rho) = 0$$

$$F_y = \int_B \frac{y}{r^3} \, d\lambda_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \ldots = \int_{[0,R]} \int_{[0,1]} \frac{\rho^2 h}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \underbrace{\int_{[-\pi,\pi]} \sin\varphi \, d\lambda(\varphi)}_{=0} \, d\lambda(s) \, d\lambda(\rho) = 0$$

$$F_z = \int_B \frac{z-h}{r^3} \, d\lambda_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \int_{[0,R]\times[-\pi,\pi]\times[0,1]} \frac{\overbrace{hs-h}^{-h\cancel{(1-s)}}}{(\rho^2+h^2)^{3/2} \cancel{(1-s)^3}} \, h \rho \cancel{(1-s)^2} \, d\lambda_3 \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ s \end{pmatrix}$$

$$= \int_{[0,R]} \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[0,1]} - \frac{h^2 \rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \, d\lambda(s) \, d\lambda(\varphi) \, d\lambda(\rho)$$

$$= 2\pi \int_0^R - \frac{h^2 \rho}{(\rho^2+h^2)^{3/2}} \, d\rho = \left| \begin{matrix} \rho^2 + h^2 = u \\ 2\rho \, d\rho = du \end{matrix} \right|$$

$$= \pi \int_{h^2}^{R^2+h^2} - \frac{h^2}{u^{3/2}} \, du$$

$$= 2\pi h^2 \left. \frac{1}{u^{1/2}} \right|_{u=h^2}^{R^2+h^2} = 2\pi h^2 \left( \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{1}{h} \right)$$

$$= 2\pi h \left( \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow F = \left( 0, 0, 2\pi h \left( \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} - 1 \right) \right)$$

68) a) ZZ: $M$ $d$-dim. MF im $\mathbb{R}^r$, $O \subseteq M$ offen bzgl. der Spurtopologie auf $M$

$\Rightarrow$ $O$ ist $d$-dim. MF im $\mathbb{R}^r$.

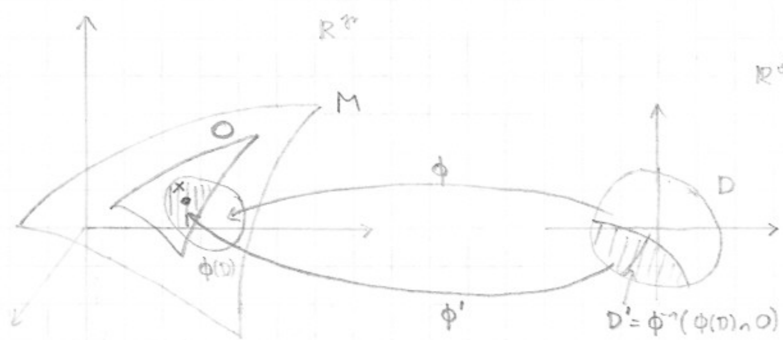
---

$M$ $d$-dim. MF, d.h. $\forall x \in M \; \exists$ $d$-dim. Einbettung $\phi: D \to M$ mit $x \in \phi(D)$

$\phi: D \to M$ heißt $d$-dim. Einbettung $:\Leftrightarrow$
- $D$ offen in $\mathbb{R}^d$
- $\phi(D) \subseteq M$ offen in $M$ (Spurtopr.)
- $\phi: D \to \phi(D)$ Homöo.
- $\phi: D \to \mathbb{R}^d$ stetig diffb.
- $\operatorname{rg} d\phi(s) = d \quad \forall s \in D$.

---

Sei $x \in O. \Rightarrow x \in M \Rightarrow \exists \phi$ Einb.: $\underbrace{D}_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^d \to \underbrace{\phi(D)}_{\text{offen in } M} \subseteq M$ mit $x \in \phi(D)$.




Def. $D' := \phi^{-1}(\underbrace{\overset{\text{offen in } M}{\phi(D)} \cap \overset{\text{offen in } M}{O}}_{\text{offen in } M}) \subseteq \mathbb{R}^r$ offen, da $\phi$ Homöo.

$\phi' := \phi|_{D'}: D' \subseteq \mathbb{R}^r \to \phi(D') = \underbrace{\phi(D)}_{M \cap \underset{\text{offen in } \mathbb{R}^r}{U}} \cap O\} = U \cap O$ also $\phi(D')$ offen in $O$.

$\phi'$ als Einschr. eines Homöo. wieder Homöo., als Einschr. einer $C^1$-Fkt. wieder $C^1$.

$\operatorname{rg} d\phi(s) = d \quad \forall s \in D \Rightarrow \operatorname{rg} d\phi'(s) = d \quad \forall s \in D'$

Also $\phi'$ ist Einbettung mit $x \in \phi'(D') \Rightarrow O$ ist MF.

b) <u>ZZ:</u> $M_i$, $i \in I$ Fam. von $d$-dim. MF des $\mathbb{R}^n$ mit

$$M_j \cap \overline{\bigcup_{i \neq j} M_i} = \emptyset \quad \forall j \in I$$

$$\Rightarrow M := \bigcup_{i \in I} M_i \text{ ist } d\text{-dim. MF im } \mathbb{R}^n.$$

Sei $x \in M$. $\Rightarrow \exists j \in I$ mit $x \in M_j$

$$\Rightarrow \exists \text{ Einb. } \phi : \underbrace{D}_{\text{offen in } \mathbb{R}^n} \to \underbrace{\phi(D)}_{\text{offen in } M_j} \subseteq M_j \quad \text{mit } x \in \phi(D)$$

$\phi(D)$ offen in $M_j$ $\Rightarrow \exists\, O$ offen in $\mathbb{R}^n$:

$$\phi(D) = O \cap M_j = O \cap M_j \cap \underbrace{\left( \overline{\bigcup_{i \neq j} M_i} \right)^c}_{\supseteq M_j} = O' \cap M_j$$

für $O' := \underbrace{O}_{\text{offen}} \cap \underbrace{\left( \overline{\bigcup_{i \neq j} M_i} \right)^c}_{\text{offen}}$ offen in $\mathbb{R}^n$

Weiters gilt

$$O' \cap M = \underbrace{\left( O' \cap \bigcup_{i \neq j} M_i \right)}_{= \emptyset \text{ lt. Konstr.}} \cup (O' \cap M_j) = \phi(D)$$

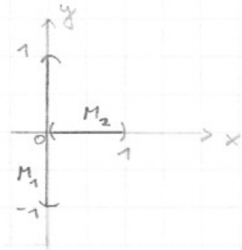
$\Rightarrow \phi(D)$ offen in $M$ $\Rightarrow \phi : D \to M$ ist Einbettung mit $x \in \phi(D)$

$\Rightarrow M$ ist MF.

c) <u>ZZ:</u> $M_1, M_2$ 1-dim. MF des $\mathbb{R}^2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ $\not\Rightarrow$ $M := M_1 \cup M_2$ ist MF.

Sei $M_1 := \{0\} \times (-1, 1)$,

$M_2 := (0, 1) \times \{0\}$.




$M_1, M_2$ offensichtlich 1-dim. MF des $\mathbb{R}^2$ und disjunkt.

Aber: Angenommen, $\exists$ Einbettung $\phi : (a, b) \to M$ mit $(0,0)^T \in \phi(a, b)$, d.h. $\exists\, t_0 \in (a, b)$: $\phi(t_0) = (0,0)^T$.

$$\phi \text{ Homöo.} \Rightarrow \phi(a, b) = O \cap M \text{ mit } \overset{\ni (0,0)^T}{O} \text{ offen in } \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \phi\big(\underbrace{(a, b) \setminus \{t_0\}}_{2 \text{ Zush.-Komp.}}\big) = \underbrace{(O \cap M) \setminus \{(0,0)^T\}}_{3 \text{ Zush.-Komp.}}$$

$\phi$ bildet zush. Mengen nicht auf zush. Mengen ab. $\Rightarrow \phi$ nicht stetig

$\Rightarrow \phi$ keine Einbettung.

72. Sei $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $F := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in S^2 : x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \tan \psi\}$ mit

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \quad \text{(Kugeloberfläche)}$$

<u>ges.:</u> Oberfläche von $F$ ($\mu(F)$).

$S^2$ ist implizit def. Mannigfaltigkeit.

Zeige: $\phi : D := (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \phi(D) = S^2 \setminus \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 \leq 0,\ x_2 = 0\} \subseteq S^2$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \cos\theta \\ \sin\alpha \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{ist Einbettung.}$$

- D offen
- $\phi$ injektiv

$$d\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\theta & -\cos\alpha\sin\theta \\ \cos\alpha\cos\theta & -\sin\alpha\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ • $\phi \in C_1$

• $\operatorname{rg} \phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = 2 \quad \forall \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} \in D$, da $\cos\theta \neq 0$.

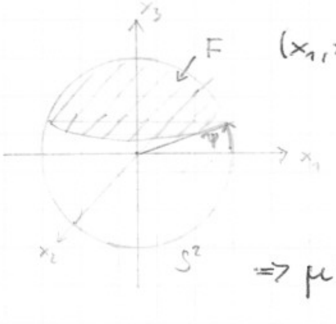
Lemma 15.3.4 $\Rightarrow$ $\phi$ ist Einbettung.

$$\mu(F) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(F \cap M_j)} \sqrt{\det d\phi_j(s)^T d\phi_j(s)}\, d\lambda_2(s)$$

$$= \int_{\phi^{-1}(F \cap \phi(D))} \sqrt{\det d\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}^T d\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}}\, d\lambda_2\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(F \cap M_j)} \sqrt{\cdots}\, d\lambda_2}_{= 0,\ \text{da } \phi(D) \cap M_j = \emptyset \ \Rightarrow \lambda_2(\phi_j^{-1}(M_j)) = 0.}$$

$$d\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}^T d\phi\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha\cos^2\theta + \cos^2\alpha\cos^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha\sin^2\theta + \sin^2\alpha\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$




$(x_1, x_2, x_3)^T \in F \Leftrightarrow x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \tan\psi \Leftrightarrow \sin\theta \geq \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\theta + \sin^2\alpha\cos^2\theta}\, \tan\psi$

$\Leftrightarrow \sin\theta \geq \cos\theta \cdot \tan\psi \Leftrightarrow \tan\theta \geq \tan\psi$

$\Leftrightarrow \theta \geq \psi.$

$$\Rightarrow \mu(F) = \int_{\underbrace{\phi^{-1}(F \cap \phi(D))}_{\phi^{-1}(F) \cap D}} \cos\theta\, d\lambda_2\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} \underset{\lambda_2(\phi^{-1}(F) \setminus D) = 0}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{[-\pi,\pi] \times [+\frac{\pi}{2}, \psi]} \cos\theta\, d\lambda_2\begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} = 2\pi \sin\theta \Big|_{\theta = \psi}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi(1 - \sin\psi).$$

Z 17. $\mathbb{T} := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$

a) <u>ZZ:</u> $\mathbb{T}$ ist 1-dim. MF im $\mathbb{R}^2$ (Angabe von Einbettungen)

Sei $(x,y)^T \in \mathbb{T} \setminus \{(1,0)^T\}$, d.g.

$$\phi_1 : \begin{cases} (0,2\pi) \to \mathbb{T} \\ \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)^T \end{cases}$$ ist Einbettung mit $(x,y)^T \in \phi_1((0,2\pi))$.

- $(0,2\pi)$ offen in $\mathbb{R}$, $\phi_1((0,2\pi)) = \mathbb{T} \setminus (1,0)^T$ offen in $\mathbb{T}$
- $\phi_1 : (0,2\pi) \to \phi_1((0,2\pi))$ ist Homöo.
- $d\phi_1(t) = (-\sin t, \cos t)^T \Rightarrow \operatorname{rg} d\phi_1(t) = 1 \quad \forall t \in (0,2\pi)$, $\phi_1 \in C_1$

Sei $(x,y)^T = (1,0)^T$, dann ist

$$\phi_2 : \begin{cases} (-\pi,\pi) \to \mathbb{T} \\ \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)^T \end{cases}$$ Einbettung mit $(x,y)^T \in \phi_2((-\pi,\pi))$.

Beweis analog.

$\Rightarrow \forall (x,y)^T \in \mathbb{T}\ \exists$ Einbettungen ~~mit~~ $\phi : D \to \mathbb{T}$ mit $(x,y)^T \in \phi(D)$, d.h. $\mathbb{T}$ ist MF.

b) Sei $x := (0,1)^T \in \mathbb{T}$, $w := (0,1)^T \in \mathbb{R}^2$.

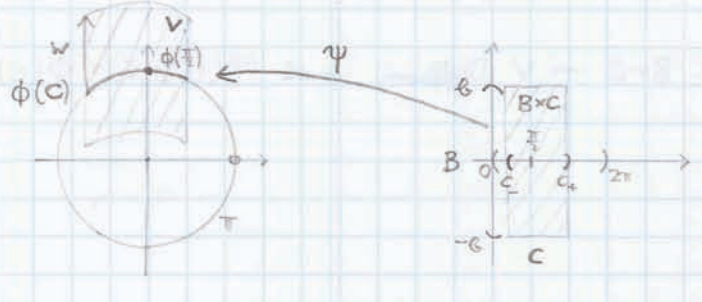
$$\phi : \begin{cases} (0,2\pi) \to \mathbb{T} \\ \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)^T \end{cases}$$

(i) <u>ZZ:</u> $\phi$ ist Einbettung ✓

(ii) Finde $B := (-b, b)$, $C := (c_-, c_+) \ni \frac{\pi}{2}$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, sodass

$$\psi : \begin{cases} B \times C \to V \\ (\xi, t) \mapsto \xi w + \phi(t) \end{cases}$$

ist Diffeom. mit $\psi(\{0\} \times C) = \phi(C) = V \cap \mathbb{T}$.




Wie groß können B und C max. gewählt werden?

Durch Maximalitätsforderung eindeutig festgelegt?

~~Wegen $\phi(C) = V \cap \mathbb{T}$ muss gelten:~~

Um Bijektivität zu gewährleisten, muss $C \subseteq (0,\pi)$.

Weiters muss dann wegen $\phi(C) = V \cap \mathbb{T}$ gelten:

$b \leq 2 \min\{\sin c_-, \sin c_+\}$.

Sei nun $b\ (<2)$ gegeben. $\Rightarrow$ max. $C = C^* = (\arcsin \frac{b}{2}, \pi - \arcsin \frac{b}{2})$

bzw. mit $c_- = \arcsin \frac{b}{2}$: $\quad B = (-2\sin c_-, 2 \sin c_-)$

$C = (c_-, \pi - c_-) \qquad c_- < \frac{\pi}{2}$.

<u>Beobachtung:</u> Vergrößert man $B$, muss $C$ kleiner werden und umgekehrt.

Es gibt also kein eindeutiges maximales $B \times C$.

Zeige: $\Psi: B \times C := \overset{\substack{(-2,2)\\ \cup}}{(-2\sin c_-, 2\sin c_+)} \times \overset{\substack{(0,\pi)\\ \cup}}{(c_-, \pi - c_-)} \to \Psi(B\times C) =: V$

$$(\xi, t) \mapsto \xi w + \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \xi + \sin t \end{pmatrix} \text{ ist Diffeom.}$$

•) $\Psi$ injektiv, da $\cos$ auf $(0,\pi)$ injektiv. $\Rightarrow \Psi$ bijektiv
$\Psi$ surjektiv (klar)

•) $B, C$ offen in $\mathbb{R}$

•) $\phi(C)$ ist offen, da $C$ offen und $\phi$ Homöo.

$\Rightarrow V = \bigcup_{\xi \in B} \phi(C) + \binom{0}{\xi}$ ist offen ?

•) $d\Psi(\xi, t) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \Psi \in C_1$

$\operatorname{rg} d\Psi(\xi,t) = 2 \Leftrightarrow \det d\Psi = \sin t \neq 0 \quad \checkmark\ \forall t \in C$.

$\Rightarrow \Psi^{-1} \in C_1$.

also $\Psi: B \times C \to V$ Diffeom. mit $\Psi(\{0\} \times C) = \phi(C) = V \cap \mathbb{T}$ lt. Konstr.

Z18) $$☺ : \begin{cases} \mathbb{T}\times\mathbb{T} & \to \mathbb{T} \\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right) & \mapsto \begin{pmatrix}x_1x_2-y_1y_2\\x_1y_2+y_1x_2\end{pmatrix}\end{cases}$$

a) (i) <u>ZZ:</u> $\langle \mathbb{T}, ☺\rangle$ ist kommutative Gruppe.

•) Abgeschlossenheit:

$$(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+y_1x_2)^2 = x_1^2x_2^2 \cancel{-2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2x_2^2$$
$$= x_1^2\underbrace{(x_2^2+y_2^2)}_{1} + y_1^2\underbrace{(x_1^2+y_1^2)}_{1} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} ☺ \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{T} \quad \forall \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{T}.$$

•) Assoziativität:

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}☺\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)☺\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1x_2-y_1y_2\\x_1y_2+y_1x_2\end{pmatrix}☺\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}(x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2+y_1x_2)y_3\\(\text{——}''\text{——})y_3-(\text{——}''\text{——})x_3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_3y_2+y_3x_2)\\x_1(x_2y_3+y_2x_3)+y_1(-y_2y_3+x_2x_3)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}☺\begin{pmatrix}x_2x_3-y_2y_3\\x_3y_2+y_3x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}☺\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}☺\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}\right)$$

•) (Links-)neutrales Element:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}☺\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

•) Kommutativität:

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}☺\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1x_2-y_1y_2\\x_1y_2+y_1x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2x_1-y_2y_1\\y_2x_1+x_2y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}☺\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

(ii) <u>ZZ:</u> $☺ : \mathbb{T}\times\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ ist stetig diffbar.

d.h. ☺ stetig und $\forall x := \left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)\in\mathbb{T}\times\mathbb{T}$

$\exists$ Einb. $\phi_1 : D_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}\times\mathbb{T}$ mit $x\in\phi_1(D_1)$ und

$\exists$ Einb. $\phi_2 : D_2 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ mit $☺(x)\in\phi_2(D_2)$, sodass

$\phi_2^{-1}\circ ☺ \circ \phi_1 : (☺\circ\phi_1)^{-1}(\phi_2(D_2)) \subseteq D_1 \to D_2$ stetig diffbar.

Sei $x \in \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ gegeben.

Wissen aus Z17:

$$\phi: (a, b) \to \mathbb{T} \quad \text{mit } \lambda((a,b)) \le 2\pi \text{ erfüllt Einbettungseigenschaften.}$$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

•) ☺ ist stetig als ZS stetiger Fkt.

•) lt. obiger Feststellung $\exists$ Einbettungen obiger Gestalt

$\phi_1: D_1 := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \to \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ mit $x \in \phi_1(D_1)$

$\phi_2: D_2 := (c, d) \to \mathbb{T}$ mit $☺(x) \in \phi_2(D_2)$

•) Sei $(s, t) \in (☺ \circ \phi_1)^{-1}(\phi_2(D_2))$, d.g.

$$(\phi_2^{-1} \circ ☺ \circ \phi_1)(s,t) = (\phi_2^{-1} \circ ☺)(\phi_1(s,t))$$

$$= (\phi_2^{-1} \circ ☺)\left(\begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\right) = \phi_2^{-1}\left(\begin{pmatrix} \cos s \cos t - \sin s \sin t \\ \cos s \sin t + \sin s \cos t \end{pmatrix}\right)$$

$$= \phi_2^{-1}\left(\begin{pmatrix} \cos(s+t) \\ \sin(s+t) \end{pmatrix}\right) = s + t + 2k\pi \overset{\in D_2}{} \text{ für passendes } k \in \mathbb{Z}.$$

$\Rightarrow$ ☺ stetig diffbar.

(iii) <u>ZZ:</u> Inversion ist stet. diffbar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ☺ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ -x_1 x_2 + x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeige $\cdot^{-1}: \mathbb{T} \to \mathbb{T}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ stetig diffbar.

•) $\cdot^{-1}$ stetig

•) $(\phi_2^{-1} \circ \cdot^{-1} \circ \phi_1)(s) = (\phi_2^{-1} \circ \cdot^{-1})\begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}$

$$= \phi_2^{-1}\begin{pmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} = \phi_2^{-1}\begin{pmatrix} \cos -s \\ \sin -s \end{pmatrix} = -s + 2k\pi \quad (k \text{ passend})$$

$\Rightarrow \cdot^{-1}$ stetig diffbar.

b) $\mu$ Oberflächenmaß von $\mathbb{T}$.

<u>ZZ:</u> $\forall g \in \mathbb{T}$; $A \subseteq \mathbb{T}$ $\mu$-messbar $\Rightarrow g \odot A := \{g \odot h : h \in A\}$ $\mu$-messbar

mit $\mu(g \odot A) = \mu(A)$.

Sei in der Folge $\phi$ definiert wie in Z17 b).

$$\Rightarrow \mu(g \odot A) = \int_{\phi^{-1}(g\odot A \cap \mathbb{T}\setminus\binom{1}{0})} \sqrt{\det d\phi(s)^T d\phi(s)}\, d\lambda(s) + \underbrace{\int_{\phi^{-1}(g \odot A \cap \binom{1}{0})} \sqrt{\cdots}\, d\lambda(s)}_{=0, \text{ da } \lambda(-\shortparallel-)=0.}$$

$$= \lambda\left(\phi^{-1}\left(g \odot A \cap \mathbb{T}\setminus\binom{1}{0}\right)\right) \text{ wegen } d\phi(s) = \binom{-\sin s}{\cos s}$$

$$\Rightarrow d\phi(s)^T d\phi(s) = \sin^2 s + \cos^2 s = 1.$$

Sei $x \in g \odot A \cap \mathbb{T}\setminus\binom{1}{0}$, dann $\exists\, a \in A$:

$$x = g \odot a = \begin{pmatrix} g_1 a_1 - g_2 a_2 \\ g_1 a_2 + g_2 a_1 \end{pmatrix} \underset{\substack{g = (\cos h,\, \sin h)^T \\ a = (\cos s,\, \sin s)^T}}{\overset{\uparrow}{=}} \begin{pmatrix} \cos s \cos h - \sin s \sin h \\ \cos s \sin h + \sin s \cos h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(s+h) \\ \sin(s+h) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(x) = s + h \in (0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \mu(g \odot A) = \lambda\left(\phi^{-1}\left(g \odot A \cap \mathbb{T}\setminus\binom{1}{0}\right)\right)$$

$$= \lambda(\{s+h : \phi(s) \in A \wedge \phi(s+h) \neq (1,0)^T\})$$

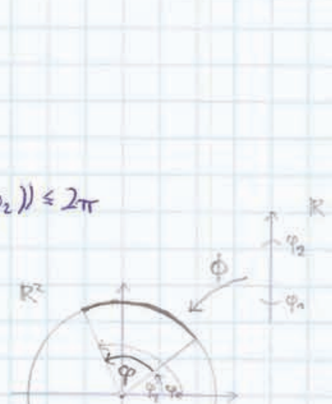
$$= \lambda(\{s+h : \phi(s) \in A\})$$

$$= \lambda(\{s : \phi(s) \in A\}) = \lambda(\phi^{-1}(A)) = \mu(A).$$

c) <u>ges.:</u> Oberflächenmaß (Bogenmaß) eines Kreisbogens

Sei $K \in \mathbb{T}$ offener Kreisbogen, dann $\exists (\varphi_1, \varphi_2) \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda((\varphi_1, \varphi_2)) \leq 2\pi$

mit $K = \phi(\varphi_1, \varphi_2)$ für Einbettung $\phi : (\varphi_1, \varphi_2) \to \mathbb{T}$.




$$\Rightarrow \mu(K) = \lambda(\phi^{-1}(K)) = \lambda((\varphi_1, \varphi_2)) = \varphi_2 - \varphi_1 =: \varphi.$$