29.4.10

Analysis 3 UE

43. $f(t) := \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}+itx}}_{=: g(t,x)} \, d\lambda(x), \quad t \in \mathbb{R}$

a) <u>ZZ:</u> f wohldefiniert.

$$|f(t)| \le \int_{\mathbb{R}} |e^{-\frac{x^2}{2}}| \cdot \underbrace{|e^{itx}|}_{=1} \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, d\lambda(x) \overset{\circledast}{=} \sqrt{2\pi} < \infty$$

b) <u>ZZ:</u> f stetig differenzierbar

- $x \mapsto g(t,x)$ intbar $\forall t \in \mathbb{R}$ ✓ (lt. a)
- $\exists h \in L_1(\mathbb{R}): \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right| \le h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus N$ mit $\lambda(N) = 0$.

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right| = \left|e^{-\frac{x^2}{2}+itx} \cdot ix\right| = e^{-\frac{x^2}{2}} |x| =: h(x)$$

$$h(x) \in L_1(\mathbb{R}), \text{ da } \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} |x| \, d\lambda(x) = 2\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x \, dx = 2\int_0^\infty e^{-y} dy = 2.$$

Lemma 13.1.10 $\rightsquigarrow$ f diffbar mit $f'(t) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)}_{=: g_t(t,x)} \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+itx} \, ix \, d\lambda(x)$

- $x \mapsto g_t(t,x)$ intbar $\forall t \in \mathbb{R}$ ✓ (s.o.)
- $t \mapsto g_t(t,x)$ stetig $\forall x \in \mathbb{R}$ ✓ (Zus. stet. Fkt.)
- $\forall t_0 \in \mathbb{R} \;\exists U_\delta(t_0) \in \mathcal{U}(t_0) \wedge h \in L_1(\mathbb{R})$:

  $|g_t(t,.)| \le h$ f.ü. $\forall t \in U_\delta(t_0)$ ✓ (wähle h wie oben)

Lemma 13.1.8 $\rightsquigarrow$ f' stetig

c) <u>ZZ:</u> $f'(t) + t f(t) = 0$

$$f'(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+itx} \, ix \, d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} x}\cdot \underbrace{e^{itx} \cdot i} \, dx$$

$$= \underbrace{-e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} i \Big|_{x=-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx} i^2 t \, dx$$

$$= -t \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+itx} \, d\lambda(x) = -t \cdot f(t)$$

d) <u>ZZ:</u> $f(t) = \sqrt{2\pi}\, \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = -t\, f(t)$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{df(t)}{f(t)} = -\int t\, dt + c$$

$$\Leftrightarrow \ln f(t) = -\frac{t^2}{2} + c \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot c$$

$$c = f(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, d\lambda(x) \overset{\circledast}{=} \sqrt{2\pi}$$

$\circledast$ $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, d\lambda(x)$

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, d\lambda(x) \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, d\lambda(y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, d\lambda_2(y)$$

$$\overset{\text{Trafo-Satz}}{=} \int_{[0,\infty)\times[0,2\pi]} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, d\lambda_2(r,\varphi) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\, dr}_{=1} \Big)\, d\varphi = 2\pi$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{2\pi}.$$

44. μ Maß mit $\mu(A) \in [0,\infty) \quad \forall A \in \mathcal{B}_2 \cap \mathbb{T}$

$$F[d\mu](z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{\varsigma + z}{\varsigma - z}\, d\mu(\varsigma) \qquad z \in \mathbb{D} := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$

a) <u>ZZ:</u> $F[d\mu](z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n < \infty$ mit $a_0 := \int_{\mathbb{T}} 1\, d\mu(\varsigma)$, $a_n := 2\int_{\mathbb{T}} \varsigma^{-n}\, d\mu(\varsigma)$ $n \geq 1$ $(z \in \mathbb{D})$

$$\frac{\varsigma+z}{\varsigma-z} = \frac{\varsigma+z}{\varsigma}\, \frac{1}{1-\frac{z}{\varsigma}} \underset{\left|\frac{z}{\varsigma}\right| = |z| < 1}{=} \left(1 + \frac{z}{\varsigma}\right) \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z}{\varsigma}\right)^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{z}{\varsigma}\right)^n + \left(\frac{z}{\varsigma}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{z}{\varsigma}\right)^0}_{1} + 2\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{z}{\varsigma}\right)^n$$

$$\Rightarrow F[d\mu](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\varsigma+z}{\varsigma-z}\, d\mu(\varsigma) = \int_{\mathbb{T}} \left(1 + \sum_{n=1}^\infty 2\left(\frac{z}{\varsigma}\right)^n\right) d\mu(\varsigma)$$

$$= \int_{\mathbb{T}} 1\, d\mu(\varsigma) + \int_{\mathbb{T}} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N 2\left(\frac{z}{\varsigma}\right)^n d\mu(\varsigma)$$

$$\overset{\circledast}{=} \int_{\mathbb{T}} 1\, d\mu(\varsigma) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{T}} 2\varsigma^{-n}\, d\mu(\varsigma) \cdot z^n$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^\infty \underbrace{2\int_{\mathbb{T}} \varsigma^{-n}\, d\mu(\varsigma)}_{a_n}\, z^n$$

$\circledast$ $\left| \sum_{n=1}^N \left(\frac{z}{\varsigma}\right)^n \right| \leq \sum_{n=1}^N \left|\frac{z}{\varsigma}\right|^n = \sum_{n=1}^N |z|^n \leq \sum_{n=1}^\infty |z|^n = \frac{1}{1-|z|} < \infty$ da $|z| < 1$

$\int \frac{1}{1-|z|}\, d\mu(\varsigma) = \frac{1}{1-|z|}\, \mu(\mathbb{T}) < \infty.$

$$|F[d\mu](z)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \le \underbrace{\mu(\mathbb{T})}_{|a_0|} + 2\mu(\mathbb{T}) \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n < \infty \quad \text{für } |z|<1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{D}.$$

$$n \ge 1: \quad |a_n z_n| = 2 \left| \int_{\mathbb{T}} \varsigma^{-n} \, d\mu(\varsigma) \right| \cdot |z|^n$$

$$\le 2 \int_{\mathbb{T}} \underbrace{|\varsigma|^{-n}}_{1} \, d\mu(\varsigma) \, |z|^n = 2\mu(\mathbb{T}) \, |z|^n$$

b) ZZ: $\operatorname{Re} F[d\mu](z) \ge 0 \quad (z \in \mathbb{D})$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\varsigma+z}{\varsigma-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varsigma+z}{\varsigma-z} + \frac{\bar\varsigma+\bar z}{\bar\varsigma-\bar z}\right) = \frac{1}{2} \, \frac{(\varsigma+z)(\bar\varsigma-\bar z)+(\bar\varsigma+\bar z)(\varsigma-z)}{(\varsigma-z)(\bar\varsigma-\bar z)}$$

$$= \frac{1}{2} \, \frac{\varsigma\bar\varsigma - z\bar z + \bar\varsigma\varsigma - \bar z z}{|\varsigma-z|}$$

$$= \frac{\overbrace{|\varsigma|}^{=1} - \overbrace{|z|}^{<1}}{\underbrace{|\varsigma-z|}_{>0}} \geqslant 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varsigma+z}{\varsigma-z} \, d\mu(\varsigma) \ge 0 \quad \forall z \in \mathbb{D}, \text{ da } \int_{\mathbb{T}} \frac{\varsigma+z}{\varsigma-z} \, d\mu = \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\operatorname{Re} \frac{\varsigma+z}{\varsigma-z}}_{>0} \, d\mu + i \int_{\mathbb{T}} \operatorname{Im} \frac{\varsigma+z}{\varsigma-z} \, d\mu.$$

45. $f(t) := \int_0^\infty \underbrace{e^{-tx} \frac{\sin x}{x}}_{=: g(t,x)} \, dx, \quad t \in [0,\infty)$

a) Für welche $t \in [0,\infty)$ existiert das Integral auch im Lebesgue'schen Sinne?

$$g \in L_1(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow |g| \in L_1(\mathbb{R}^+)$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} |g| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-tx} \overbrace{\frac{|\sin x|}{x}}^{\le 1} \, d\lambda(x) \le \int_0^\infty e^{-tx} \, dx = \left(-\frac{1}{t}\right) e^{-tx} \Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{t} < \infty \; (t \ne 0)$$

Fall $t=0$:

$$f(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\sin x}{x} \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^- d\lambda(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ d\lambda(x) \ge \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{(2k+2)\pi} \, d\lambda(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{- \frac{\cos x}{(2k+2)\pi} \Big|_{x=2k\pi}^{(2k+1)\pi}}_{\frac{\cos 2k\pi - \cos(2k+1)\pi}{2(k+1)\pi} = \frac{1-(-1)}{2(k+1)\pi}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

$$\Rightarrow g(0,\cdot) \notin L_1(\mathbb{R}^+).$$

B) (i) <u>ZZ:</u> f stetig auf $(0,\infty)$

$$|g(t,x)| = \left| e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \right| \leq e^{-tx} \leq e^{-\alpha x} \qquad \forall t \in (\alpha, \beta),\ \alpha > 0$$

$\Rightarrow$ f stetig auf $(0,\infty)$ lt. Lemma 13.1.8

(ii) <u>ZZ:</u> f stetig an 0

Soll gelten:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta e^{-tx} \frac{\sin}{x}\,dx$$

$$\overset{①}{=} \lim_{\beta\to\infty} \lim_{t\to 0^+} \int_0^\beta e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

g stetig auf $[0,\beta]\times\mathbb{R}^+$ (vgl. Kor. 8.7.6)

$$= \lim_{\beta\to\infty} \int_0^\beta \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = f(0)$$

① Vertauschung der Limiten gerechtfertigt bei glm. Konvergenz von

$$\int_0^\beta g(t,x)\,dx \xrightarrow{\beta\to\infty} \int_0^\infty g(t,x)\,dx \quad \cancel{\text{bzgl. } t\in\mathbb{R}^+}.$$

$$f(t) = \underbrace{\int_0^1 e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{stetig lt. Koroll. 8.7.6.}} + \int_1^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int_1^\infty \underbrace{e^{-tx} \sin x}\,\underbrace{\frac{1}{x}}\,dx = \lim_{\beta\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} (\cos x + t\sin x) \right]_{x=1}^{\infty} - \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} (\cos x + t\sin x)\,dx$$

$$\int e^{-tx} \sin x\,dx = -e^{-tx}\cos x - t \underbrace{\int e^{-tx} \cos x\,dx}_{= e^{-tx}\sin x + t\int e^{-tx} \sin x\,dx}$$

$$\Leftrightarrow \int e^{-tx} \sin x\,dx = -\frac{e^{-tx}}{1+t^2} (\cos x + t\sin x)$$

$$= \underbrace{-\frac{e^{-t}}{1+t^2} (\cos 1 + t\sin 1)}_{\text{stetig}} - \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} (\cos x + t\sin x)\,dx$$

Bleibt noch zu zeigen, dass der letzte Grenzübergang gleichmäßig ist: ~~bzgl. $t\in\mathbb{R}^+$~~

$$\left| \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} (\cos x + t\sin x)\,dx - \int_1^\beta \frac{1}{x^2} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} (\cos x + t\sin x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_\beta^\infty \frac{1}{x^2} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} (\cos x + t\sin x)\,dx \right| \leq \int_\beta^\infty \frac{1}{x^2} \left| \frac{\cos x + t\sin x}{1+t^2} \right| \underbrace{e^{-tx}}_{\leq 1}\,dx$$

$|\cos x + t\sin x| \leq |\cos x| + t|\sin x| \quad 1+t$ $\leq \int_\beta^\infty \frac{2}{x^2}\,dx = \lim \frac{2}{\beta} = 0.$ unabh. von t, also

(iii) <u>ZZ:</u> f stetig diffbar auf $(0,\infty)$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right| = \left|-x\, e^{-tx}\, \frac{\sin x}{x}\right| = e^{-tx}\,|\sin x|$$

$$\leq e^{-tx} \leq e^{-\alpha x} \in L_1(\mathbb{R}^+) \qquad \forall t \in (\alpha,\beta) \subseteq (0,\infty).$$

$\Rightarrow$ f auf $(0,\infty)$ diffbar lt. Korollar 13.1.10 mit

$$f'(t) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\, d\lambda(x) = -\int_{\mathbb{R}^+} e^{-tx} \sin x \, d\lambda(x)$$

$$= \frac{e^{-tx}}{1+t^2}(\cos x + t \sin x)\Big|_{x=0}^{\infty} = -\frac{1}{1+t^2} \qquad \text{(stetig)}$$

c) $f'(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}$ $\qquad$ $\cancel{\lim_{t\to\infty} f(t) = \int_0^\infty e^{-x \cdot \lim_{t\to\infty} t} \frac{\sin x}{x}\, dx}$

f stetig $\qquad$ Maj: e^{-tx} für $t \geq 1$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{t\to\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, d\lambda(x) = 0$$

$$f(t) = \int f'(t)\, dt + c = \int -\frac{1}{1+t^2}\, dt + c = -\arctan t + c$$

$$0 = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} -\arctan t + c = -\frac{\pi}{2} + c \iff c = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = f(0) = -\arctan 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Z9. $(I, \preceq)$ ger. Menge

$(f_i)_{i\in I}$ Netz messbarer Fkt. $f_i : [0,1] \to [0,1]$

$(f_i)_{i\in I}$ monoton $\nearrow$, d.h. $i \preceq j \Rightarrow f_i(x) \leq f_j(x) \quad \forall x \in [0,1]$

<u>ZZ:</u> $\lim\limits_{i\in I} f_i(x) = \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$

Sei $x_0 \in [0,1]$. Da Kugeln Filterbasis bilden, genügt zu zeigen:

$$\forall i_0 \in I \quad \exists \delta > 0 : \quad \Big| \sup_{i\in I} f_i(x_0) - f_{j_0}(x_0) \Big| < \delta \quad \forall j \succeq i_0$$

Wegen der Monotonie gilt

$$\delta \overset{\text{z.B.}}{>} \sup_{i\in I} f_i(x_0) - f_{i_0}(x_0) \geq \sup_{i\in I} f_i(x_0) - f_j(x_0) \geq 0 \qquad \forall j \succeq i_0 .$$

Z10. $I := \{ A \subseteq [0,1] \mid \lambda(A) = 0 \}, \quad \preceq := \subseteq$

$(I, \preceq)$ ist gerichtete Menge, da

- reflexiv: $A \subseteq A \quad \forall A \in I$ ✓
- transitiv: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C \quad \forall A, B, C \in I$ ✓
- Richtungseigenschaft: $\forall A, B \in I \quad \exists C \in I : A \subseteq C \wedge B \subseteq C$ ✓ setze $C = A \cup B \in I$

$f_i(x) = 1\!\!1_i(x) \in [0,1]$ messbar und monoton $\nearrow$, da

$$i \preceq j \Leftrightarrow i \subseteq j \Rightarrow 1\!\!1_i(x) \leq 1\!\!1_j(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\overset{(Z9)}{\Rightarrow} \lim_{i\in I} f_i(x) = \sup_{i\in I} f_i(x) \geq f_{\{x\}}(x) = 1$$

$\leq$ ist trivial.

also: $$\int_{[0,1]} 1\!\!1_i(x) \, d\lambda(x) = \int_i d\lambda = 0 \qquad \forall i \in I$$

$$\int_{[0,1]} \lim_{i\in I} f_i(x) \, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} 1 \, d\lambda = \lambda([0,1]) = 1$$

42. $x, y \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Re} x, \operatorname{Re} y > 0$

a) $\underline{ZZ:}$ $\displaystyle\int_{(0,1)} \frac{t^{x-1}}{1+t^y}\, d\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+ny}$

$$\int_{(0,1)} \frac{t^{x-1}}{1+t^y}\, d\lambda(t) = \int_{(0,1)} t^{x-1} \frac{1}{1-(-t^y)}\, d\lambda(t)$$

$$\overset{\substack{|-t^y| = t^{\operatorname{Re} y} < 1 \\ \forall t \in (0,1)}}{=} \int_{(0,1)} t^{x-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-t^y)^n \, d\lambda(t)$$

$$= \int_{(0,1)} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{x-1+ny}\, d\lambda(t)$$

$$\overset{*}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_{(0,1)} (-1)^n t^{x-1+ny}\, d\lambda(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\int_0^1 t^{x-1+ny}\, dt}_{= \left.\frac{t^{x+ny}}{x+ny}\right|_0^1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+ny}$$

$*$ $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{x-1+ny}\right| = \left|t^{x-1}\right| \left|\frac{1+(-t^y)^N}{1+t^y}\right| = \underbrace{t^{\operatorname{Re} x-1}}_{\in L_1(\mathbb{R}),\text{ da } \operatorname{Re} x > 0.} \left|\frac{1+(-t^y)^N}{1+t^y}\right| \leq K \cdot t^{\operatorname{Re} x-1} \in L_1(\mathbb{R})$

Zeige: $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists K \in \mathbb{R}: \left|\frac{1+(-t^y)^N}{1+t^y}\right| \leq K \quad \forall t \in (0,1)$

$$|1+t^y|^2 = (1+t^y)(1+t^{\bar y}) = 1 + t^y + t^{\bar y} + t^{y+\bar y} = 1 + 2t^{\operatorname{Re} y} \underbrace{\cos(\operatorname{Im} y \ln t)}_{\in[-1,1]} + t^{2\operatorname{Re} y}$$

$$t^y + t^{\bar y} = t^{a+ib} + t^{a-ib} = t^a\left(e^{ib\ln t} + e^{-ib\ln t}\right)$$

$$= t^a\left(\cos(b\ln t) + i\sin(b\ln t) + \cos(b\ln t) - i\sin(b\ln t)\right)$$

$$= 2t^a \cos(b \ln t)$$

Es $\exists\, \varepsilon > 0$: $\cos(\operatorname{Im} y \underbrace{\ln t}_{(-\infty,0)}) > 0 \quad \forall t \in (\varepsilon, 1)$

$\Rightarrow |1+t^y| \geq 1$

$\forall t \in (0, \varepsilon]$ gilt die Abschätzung

$$|1+t^y| \geq \sqrt{1-2t^{\operatorname{Re} y} + t^{2\operatorname{Re} y}} = 1 - t^{\overbrace{\operatorname{Re} y}^{>0}} \geq C > 0.$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1+(-t^y)^N}{1+t^y}\right| \leq \frac{1}{C}\left(1 + |-t^y|^N\right) = \frac{1}{C}\left(1 + t^{\overbrace{N\cdot\operatorname{Re} y}^{>0}}\right) \leq \frac{2}{C} =: K.$$

b) Begründe, warum die Reihe konvergiert.

Die Konvergenz ist durch das Leibniz-Kriterium gesichert.

1) Es handelt sich um eine alternierende Reihe.

2) Die Beträge der Summanden bilden (ab einem gewissen Index) eine monotone Nullfolge.

Bew. für Beh. 2):

$$\left|\frac{1}{x+ny}\right| \geq \left|\frac{1}{x+(n+1)y}\right| \iff |x+ny|^2 \leq |x+(n+1)y|^2$$

$$\iff \cancel{(x+ny)(\overline{x}+n\overline{y})} \leq (x+ny+y)(\overline{x}+n\overline{y}+\overline{y})$$

$$= \cancel{(x+ny)(\overline{x}+n\overline{y})} + \overline{y}(x+ny+y) + y(\overline{x}+n\overline{y}+\overline{y})$$

$$\iff 0 \leq x\overline{y} + y\overline{x} + 2ny\overline{y} + 2y\overline{y}$$

$$\iff n \geq -\frac{x\overline{y}+y\overline{x}+2y\overline{y}}{2y\overline{y}} = -\left(\frac{x}{2y}+\frac{\overline{x}}{2\overline{y}}\right) - 1$$

$$= -\underbrace{\operatorname{Re}\left(\frac{x}{y}\right)}_{\frac{\overbrace{ac}^{>0}-\overbrace{bd}^{\in\mathbb{R}}}{\underbrace{c^2+d^2}_{>0}}} - 1 \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ (von x und y abh.), ab dem $\left|\frac{1}{x+ny}\right|$ monotone Nullfolge ist.

Z12. μ Maß mit $\mu(A) < \infty \quad \forall A \in \mathcal{L}$.

$$G[d\mu](z) := \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1+xz}{x-z}}_{g(z,x)} \, d\mu(x), \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \text{ (d.h. } \operatorname{Im} z \neq 0)$$

a) $\underline{ZZ:}$ $G[d\mu]$ auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ wohldefiniert.

·) $g(z,x)$ ist definiert $\forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, da $\overset{\in\mathbb{R}}{x} \neq \overset{\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}{z}$.

·) $g(z,x)$ stetig, d.h. auf $\mathbb{R}$ $\nexists$ Unbeschränktheitsstellen

·) Betrachte Grenzwerte gegen $\pm\infty$:

$$\left|\frac{1+xz}{x-z}\right|^2 = \left|\frac{1+x(a+ib)}{x-(a-ib)}\right|^2 = \frac{(1+xa)^2+xb^2}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1+2ax+x^2a^2+x^2b^2}{x^2-2ax+a^2+b^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2a}{x}+a^2+b^2}{1-\frac{2a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{x^2}} \rightarrow a^2+b^2 \text{ für } x \to \pm\infty$$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}: |g(z,x)| \leq K \quad \forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

also: $\displaystyle |G[d\mu](z)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1+xz}{x-z}\right| d\mu(x) \leq K \cdot \mu(\mathbb{R}) < \infty$.

b) $\underline{ZZ:}$ $G[d\mu]$ stetig auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

folgt direkt aus Lemma 13.1.8, alle VS bereits gezeigt.

c) $\underline{ZZ:}$ $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} G[d\mu](z) \geq 0$

Sei $z = a + ib$ $(b \neq 0)$, d.g.

$$G[d\mu](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x(a+ib)}{x-(a-ib)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+xa)(x-a)-xb^2}{(x-a)^2+b^2} d\mu(x) + i \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+xa)b+(x-a)bx}{(x-a)^2+b^2} d\mu(x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} G[d\mu](z) = b^2 \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\overbrace{(1+xa)+(x-a)x}^{1+x^2}}{(x-a)^2+b^2}}_{>0} d\mu(x) \geq 0.$$