22.4.10

Analysis 3 UE

$\underline{V}$)

34. $Lip_L([0,1],\mathbb{R}) := \{ f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \exists C \leq L : |f(x)-f(y)| \leq C\cdot|x-y| \ \forall x,y \in [0,1]\}$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $f_n \in Lip_L([0,1],\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(0) = \alpha$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\exists$ glm. konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Zeige, dass $F := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli erfüllt:

·) $[0,1]$ abg. u. beschränkt, also kompakt

$\Rightarrow \langle [0,1], \mathcal{E}|_{[0,1]}\rangle$ ist kompakter top. Raum

·) $F \subseteq C([0,1],\mathbb{R})$ ✓

·) F punktweise beschr., d.h. $\forall x \in [0,1]: \{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.

$|f_n(x) - f_n(0)| = |f_n(x) - \alpha| \leq L\cdot|x-0| \leq L$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \leq L + |\alpha| < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in [0,1]$

·) F gleichgradig stetig, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in [0,1] \ \ \exists U \in \mathcal{U}(x): \ |f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall y \in U, \ \forall n \in \mathbb{N}$

genügt auf Filterbasis zu zeigen, also äquivalent:

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in [0,1] \ \ \exists \delta > 0 : \ |f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall y \in U_\delta(x)^{\cap [0,1]} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sei $\varepsilon > 0$, d.g. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$|f_n(y) - f_n(x)| \leq L\cdot|x-y| < L\cdot\delta < \varepsilon \quad$ für $\delta < \frac{\varepsilon}{L}$

Arzelà-Ascoli $\rightsquigarrow \overline{F}$ kompakt $\Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält Teilfolge, die gegen ein $f \in \overline{F}$ konvergiert (bzgl. d_∞, also glm.)

35. $\{\sin nx \mid n\in\mathbb{N}\} \subseteq C([0,1],\mathbb{R})$ gleichgradig stetig?

Anm.: Menge gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall x\in[0,1] \;\; \forall \varepsilon>0: \;\; \exists U\in\mathcal{U}(x): \;\; |\sin nx - \sin ny| < \varepsilon \;\; \forall y\in U \;\; \forall n\in\mathbb{N}$$

äquiv. dazu mit $U\in\{U_\delta(x)\cap[0,1] : \delta>0\}$, da Basis von $\mathcal{U}(x)$.

Betrachte $x=0$. $\Rightarrow \sin nx = 0 \;\; \forall n\in\mathbb{N}$
$\varepsilon\in(0,1)$ fest

$\Rightarrow |\sin ny| < \varepsilon \;\; \forall n\in\mathbb{N} \;\; \forall y\in[0,\delta)$ für passendes $\delta>0$.

Aber $\forall \delta>0 \;\; \exists N\in\mathbb{N}: \;\; \frac{\pi}{2N}\in[0,\delta)$

$\Rightarrow \sin(N\frac{\pi}{2N}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 > \varepsilon$ ↯ zu $|\sin ny|<\varepsilon \;\; \forall n\in\mathbb{N}, y\in[0,\delta)$

$\Rightarrow$ Menge nicht gleichgradig stetig.

36. $\mathbb{T} := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$, $\langle C(\mathbb{T},\mathbb{C}), d_\infty\rangle$

ZZ: $\mathcal{A} := \{\sum_{\ell=m}^{n} a_\ell z^\ell \mid m,n\in\mathbb{Z}, m\le n, a_\ell\in\mathbb{C}\}$ dicht in $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$.

Zeige, dass $\mathcal{A}$ die Voraussetzungen für den Satz von Stone-Weierstraß erfüllt sind:

- $\mathbb{T}$ kompakt

  Betrachte $\varphi: [0,2\pi] \to \mathbb{T}$, $t \mapsto e^{it}$ $\Rightarrow \mathbb{T} = \varphi([0,2\pi])$ kompakt, da φ stetig.

- $\mathcal{A} \subseteq C(\mathbb{T},\mathbb{C})$ ✓ da Polynomfunktionen global stetig.

- $\mathcal{A}$ Algebra

$$f,g\in\mathcal{A} \Rightarrow f+g = \sum_{\ell_1=m_1}^{n_1} a_{\ell_1} z^{\ell_1} + \sum_{\ell_2=m_2}^{n_2} a_{\ell_2} z^{\ell_2} = \sum_{\ell=m_1\wedge m_2}^{n_1\vee n_2} \overset{\text{passend}}{(a_{\ell_1}+a_{\ell_2})} z^\ell \in\mathcal{A}$$

$$c\in\mathbb{C}, f\in\mathcal{A} \Rightarrow c\cdot f = \sum_{\ell=m}^{n} \underbrace{c\cdot a_\ell}_{\in\mathbb{C}} z^\ell \in\mathcal{A}$$

$$f,g\in\mathcal{A} \Rightarrow f\cdot g = \sum_{\ell_1=m_1}^{n_1} a_{\ell_1} z^{\ell_1} \cdot \sum_{\ell_2=m_2}^{n_2} a_{\ell_2} z^{\ell_2}$$

$$= \sum_{\ell_1=m_1}^{n_1} \sum_{\ell_2=m_2}^{n_2} a_{\ell_1} a_{\ell_2} z^{\ell_1+\ell_2}$$

$$= \sum_{\ell=m_1+m_2}^{n_1+n_2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{passend}}}{a_\ell} z^\ell \in\mathcal{A}$$

•) $\mathcal{A}$ punktetrennend, da $z \in \mathcal{A}$

•) $\mathcal{A}$ nirgends verschwindend, da $1 \in \mathcal{A}$

•) $\mathcal{A}$ abgeschlossen bzgl. Konjugation

$$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} = \overline{\sum_{\ell=m}^{n} a_\ell z^\ell} = \sum_{\ell=m}^{n} \overline{a_\ell} (\overline{z})^\ell$$

$$= \sum_{\ell=m}^{n} \overline{a_\ell} \Big(\frac{\overbrace{|z|^2}^{1}}{z}\Big)^\ell = \sum_{\ell=m}^{n} \overline{a_\ell} z^{-\ell} = \sum_{k=-n}^{-m} \tilde{a}_k z^k \in \mathcal{A} \qquad \tilde{a}_k := \overline{a}_{-k}$$

Satz von Stone-Weierstraß $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ dicht in $C([0,1], \mathbb{C})$.

37. $\tau: [0, 2\pi] \to \mathbb{T}: t \mapsto e^{it}$

a) $\underline{ZZ:}$ $\Phi: C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \to P := \{ f \in C([0,2\pi], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(2\pi) \}$ bijektiv.
$f \mapsto f \circ \tau$

Wissen aus Bsp. 11: $\tau' := \tau|_{[0,2\pi)}$ Homeomorphismus, also τ' bij., stetig, $(\tau')^{-1}$ stetig

•) Φ injektiv

Sei $f \neq g \in C(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{T}$ mit $f(z_0) \neq g(z_0)$

τ surjektiv $\Rightarrow \exists t_0 \in [0, 2\pi]: z_0 = \tau(t_0)$

$\Rightarrow f \circ \tau(t_0) \neq g \circ \tau(t_0) \Leftrightarrow \Phi(f) \neq \Phi(g)$

•) Φ surjektiv

Sei $g \in P \subseteq C([0,2\pi], \mathbb{C})$. $\Rightarrow g \circ (\tau')^{-1}: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig

$$\Rightarrow \Phi(g \circ (\tau')^{-1}) = g \circ \underbrace{(\tau')^{-1} \circ \tau}_{= id} = g$$

b) $\underline{ZZ:}$ $\sup_{z \in \mathbb{T}} |f(z)| = \sup_{t \in [0,2\pi]} |\Phi(f)(t)|$

$$\sup_{t \in [0,2\pi]} |\Phi(f)(t)| = \sup_{t \in [0,2\pi]} |f \circ \tau(t)| = \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(\tau(t))| = \sup_{z \in \mathbb{T}} |f(z)|$$

$\{\tau(t) \mid t \in [0,2\pi]\} = \{z \mid z \in \mathbb{T}\}$

c) Bestimme $\Phi(\mathcal{A})$.

Sei $f \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow \Phi(f) = \Phi\Big(\sum_{\ell=m}^{n} a_\ell \overset{\in \mathbb{T}}{z^\ell}\Big) = \sum_{\ell=m}^{n} a_\ell [\tau(t)]^\ell = \sum_{\ell=m}^{n} a_\ell e^{i\ell t^{\in[0,2\pi]}}$

$$\Rightarrow \Phi(\mathcal{A}) = \Big\{ \sum_{\ell=m}^{n} a_\ell e^{i\ell t},\ m,n \in \mathbb{Z},\ m \leq n,\ a_\ell \in \mathbb{C} \Big\}$$

d) Welcher Satz aus der Theorie der Fourierreihen wurde soeben bewiesen?

in Bsp. 36 gezeigt: $\mathbb{T}$ kompakt, $\mathcal{A}$ dicht in $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$

weiters: $\|f\|_\infty^{\mathbb{T}} = \|\Phi(f)\|_\infty^{[0,2\pi]}$

Durch $\|\cdot\|_\infty$ wird also auf $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$ und P dieselbe Topologie induziert.

$\Rightarrow \Phi(\mathcal{A})$ dicht in $\Phi(C(\mathbb{T},\mathbb{C})) = P$.

d.h. jede 2π-periodische, stetige, komplexe Funktion kann auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig genau durch (komplexe) trigonometrische Polynome gleichmäßig approximiert werden.

39. $C := \{ f : [0,2\pi]^2 \to \mathbb{R} \mid f(x,0) = f(x,2\pi)\ \forall x \in [0,2\pi] \wedge f(0,y) = f(2\pi,y)\ \forall y \in [0,2\pi] \}$

$C \supseteq \mathcal{T}P :=$ Mengen aller Fkt. der Gestalt

$$f(x,y) = \sum_{l,k=0}^{N} a_{l,k} \cos lx \cos ky + b_{l,k} \cos lx \sin ky + c_{l,k} \sin lx \cos ky + d_{l,k} \sin lx \sin ky \quad (a_{l,k}, b_{l,k}, c_{l,k}, d_{l,k} \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

Sei $f \in C$. $\underline{ZZ:}$ $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{T}P\ \forall n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \to f$ glm.

Def. $\mathcal{A} := \left\{ \sum_{l=m_1}^{n_1} \sum_{k=m_2}^{n_2} a_{l,k} z_1^l z_2^k \;\middle|\; a_{l,k} \in \mathbb{C};\ m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z};\ m_1 \le n_1;\ m_2 \le n_2 \right\}$

(i) Prüfe Voraussetzungen für Satz von Stone Weierstraß:

- $\mathbb{T}^2$ kompakt ✓ lt. Tychonoff
- $\mathcal{A} \subseteq C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$ da Potenzfkt. stetig
- $\mathcal{A}$ Algebra:

$$f,g \in \mathcal{A} \Rightarrow f+g = \sum_{l=m_{1f}\wedge m_{1g}}^{n_{1f}\vee n_{1g}} \sum_{k=m_{2f}\wedge m_{2g}}^{n_{2f}\vee n_{2g}} (a_{l,k} + b_{l,k}) z_1^l z_2^k \in \mathcal{A}$$

$$f \in \mathcal{A} \Rightarrow c\cdot f = \sum_{l=m_1}^{n_1} \sum_{l=m_2}^{n_2} \underbrace{c\, a_{l,k}}_{\in\mathbb{C}} z_1^l z_2^k \in \mathcal{A}$$

$$f,g \in \mathcal{A} \Rightarrow f\cdot g = \sum_{l_f=m_{1f}}^{n_{1f}} \sum_{k_f=m_{2f}}^{n_{2f}} \sum_{l_g=m_{1g}}^{n_{1g}} \sum_{k_g=m_{2g}}^{n_{2g}} a_{l_f,k_f} b_{l_g,k_g} z_1^{l_f+l_g} z_2^{k_f+k_g}$$

$$= \sum_{l=m_{1f}+m_{1g}}^{n_{1f}+n_{1g}} \sum_{k=m_{2f}+m_{2g}}^{n_{2f}+n_{2g}} \underbrace{a_l b_k}_{\in\mathbb{C}} z_1^l z_2^k \in \mathcal{A}$$

- $\mathcal{A}$ punktetrennend, nirgends verschwindend

Sei $\binom{z_{11}}{z_{12}} \neq \binom{z_{21}}{z_{22}} \in \mathbb{T}^2$, ~~$\forall$ Sei~~ $c_1 \neq c_2 \in \mathbb{C}$, dann $\exists$ ~~$\forall$~~ ein $f(z_1,z_2) := a_{00} + a_{11} z_1 z_2$, sodass

$\{ f(z_{11}, z_{12}) = c_1$ (die GS nach a_{00}, a_{11} auflösen) $\Rightarrow \mathcal{A}$ punktetrennend, nirgends

•) $\mathcal{A}$ bzgl. Konjugation abgeschlossen

$$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} = \sum_{\ell=m_1}^{n_1} \sum_{k=m_2}^{n_2} \overline{a_{\ell,k}} \, (\overline{z_1})^{\ell} (\overline{z_2})^{k} = \sum_{\ell=m_1}^{n_1} \sum_{k=m_2}^{n_2} \overline{a_{\ell,k}} \, (z_1)^{-\ell} (z_2)^{-k} \in \mathcal{A}$$

Stone-Weierstraß $\rightsquigarrow$ $\mathcal{A}$ dicht in $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$.

(ii) Definiere $\tau_2 : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{T}^2 : (t,s) \mapsto (\tau(t), \tau(s)) = (e^{it}, e^{is})$

sowie $\Phi(f) : C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}) \to C_{\mathbb{C}} := \{ f \in C([0,2\pi]^2, \mathbb{C}) \mid \ldots \}$
$\qquad f \mapsto f \circ \tau_2$

$\Rightarrow \Phi(f)$ bijektiv (analog Bsp. 37) sowie $\|f\|_\infty^{\mathbb{T}^2} = \|\Phi(f)\|_\infty^{[0,2\pi]^2}$

$\Rightarrow \Phi(\mathcal{A}) = \{ \sum_{\ell=m_1}^{n_1} \sum_{k=m_2}^{n_2} a_{\ell,k} \, e^{i\ell t} \, e^{iks} \mid \ldots \}$ dicht in $C_{\mathbb{C}}$.

(iii) $\mathrm{Re}(a_{\ell,k} \, e^{i\ell t} e^{iks}) = \mathrm{Re}\left((b_{\ell,k} + i c_{\ell,k})(\cos(\ell t + ks) + i \sin(\ell t + ks)) \right)$

$= b_{\ell,k} \cos(\ell t + ks) - c_{\ell,k} \sin(\ell t + ks)$

$= b_{\ell,k} \cos \ell t \cos ks - b_{\ell,k} \sin \ell t \sin ks$
$\quad - c_{\ell,k} \sin \ell t \cos ks - c_{\ell,k} \cos \ell t \sin ks$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(\Phi(\mathcal{A})) (\in \mathcal{TP})$ ist dicht in $\mathrm{Re}(C_{\mathbb{C}}) = C$ $\Rightarrow \mathcal{TP}$ dicht in C.

Also $\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{TP}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \to f \in C$ glm.

39. Sei $f \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ und gelte $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, x^n y^m \, dx \, dy$ $\forall n,m \in \mathbb{N}_0$.

<u>ZZ</u>: $f \equiv 0$.

Betrachte $\mathcal{A} = \{ \sum_{i,j=0}^{N} a_{i,j} \, x^i y^j \mid N \in \mathbb{N}, \, a_{i,j} \in \mathbb{R} \}$.

$\mathcal{A}$ ist Unteralgebra von $C([0,1]^2, \mathbb{R})$ (siehe Bsp. 38)

Sei nun $\int_0^1 \int_0^1 p(x,y) \, x^n y^m \, dx \, dy = 0$ $\forall n,m \in \mathbb{N}_0$ für ein $p \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow a_{n,m} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{N} a_{i,j} \, x^i y^j \, x^n y^m \, dx \, dy = 0$ $\forall n,m \in \mathbb{N}_0$; $a_{n,m} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{n,m=0}^{N} a_{n,m} \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{N} a_{i,j} \, x^i y^j \, x^n y^m \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n,m=0}^{N} a_{n,m} \left(\text{———} \cdot \text{———} \right) x^n y^m \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{N} a_{i,j} \, x^i y^j \cdot \sum_{n,m=0}^{N} a_{n,m} \, x^n y^m \, dx \, dy$$

$a_{n,m}$ bel. $\in \mathbb{R}$

$$a_{n,m} := a_{i,j} \Rightarrow 0 = \int_0^1\int_0^1 \Big(\sum_{i,j=0}^{N} a_{i,j}\, x^i y^j\Big)^2 dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 p(x,y)^2\, dx\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1\int_0^1 p(x,y)^2\, dx\,dy = 0 \Leftrightarrow p^2 = 0 \ \lambda_2\text{-fü} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p \text{ ist Polynom}\end{array}\right\} \Rightarrow p \equiv 0.$$

$[0,1]^2$ kompakt, $\mathcal{A}$ ist punktetrennende, nirgends verschw. Algebra (Bsp. 38)

$\Rightarrow \mathcal{A}$ liegt dicht in $C([0,1]^2, \mathbb{R})$.

Gezeigt: $f \in \mathcal{A} \Rightarrow f \equiv 0$.

Sei $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Da $\mathcal{A}$ dicht liegt, $\exists$ Folge $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \to f$ glm. mit $p_k \in \mathcal{A}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\cancel{\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^2} p_k(x,y)\, x^n y^m\, dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]^2} \underbrace{p_k \cdot \omega}_{\leq p_k \in L_1}\, d\lambda_2 = \int_{[0,1]^2} f\omega\, d\lambda_2}$$

$$\cancel{= \int_{[0,1]^2} f(x,y)\, x^n y^m\, dx\,dy = 0 \qquad \forall n,m \in \mathbb{N}_0}$$

$(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \to f$ glm., d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N}: d_\infty(p_k, f) = \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |p_k(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon \quad \forall k > K$.

$$\Rightarrow \Big|\int_{[0,1]^2} p_k(x,y)\, x^n y^m\, dx\,dy - \underbrace{\int_{[0,1]^2} f(x,y)\, x^n y^m\, dx\,dy}_{=0}\Big|$$

$$\leq \int_{[0,1]^2} |p_k(x,y) - f(x,y)|\, \underbrace{|x^n y^m|}_{\leq 1}\, dx\,dy$$

$$\leq \int_{[0,1]^2} \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |p_k(x,y) - f(x,y)|\, dx\,dy < \int_{[0,1]^2} \varepsilon\, dx\,dy = \varepsilon. \qquad \forall k > K$$

Für $p_k \to f$ muss gelten: ~~Es gilt also~~ $\forall$ $\lim_{k\to\infty} \int_0^1\int_0^1 p_k(x,y)\, x^n y^m\, dx\,dy = 0 \quad \forall n,m \in \mathbb{N}_0. \qquad (*)$

Angenommen $p_k \to f \not\equiv 0$. $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall K \in \mathbb{N}\ \exists k > K: |p_k| > \varepsilon$.

Zeige, dass in diesem Fall $(*)$ nicht erfüllt sein kann.

Sei $n = m = 0$, $K \in \mathbb{N}$; ε, k leisten obiges, dann gilt:

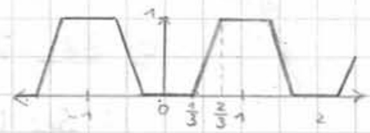
$$\int_{[0,1]^2} p_k\, d\lambda_2 = \int_{[p_k \leq \varepsilon]\cap[0,1]^2} p_k\, d\lambda_2 + \int_{[p_k > \varepsilon]\cap[0,1]^2} p_k\, d\lambda_2 > \int_{[p_k > \varepsilon]\cap[0,1]^2} \varepsilon\, d\lambda_2 = \lambda_2([p_k > \varepsilon]\cap[0,1]) \cdot \varepsilon =: \tilde{\varepsilon}$$

Also kann nur gelten: $f \equiv 0$.

Nun ist $\tilde{\varepsilon} > 0$, da $\lambda_2([p_k > \varepsilon]\cap[0,1]) \neq 0$ (wegen der Stetigkeit von p_k muss $p_k > \varepsilon$ auf einer offenen Kugel gelten)

$\Rightarrow \int p_k\, d\lambda_2 \not\to 0$.

Z7) $f(t) := \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ 3t-1 & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 1 & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$ $\quad f(-t) = f(t)$, $f(t+2) = f(t)$



$$x(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(3^{2k} t), \quad y(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(3^{2k+1} t) \qquad t \in [0,1]$$

a) ZZ: $F: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ ist stetig.

f stetig auf $\mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}} f(3^{2k} t)$ stetig auf $[0,1]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} f(3^{2k} t) \underset{f \in [0,1]}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$$

lt. Weierstraßschem Majorantenkriterium ist die Konvergenz also gleichmäßig

$\Rightarrow x$ stetig. Analog: y stetig.

b) ZZ: $F([0,1]) = [0,1]^2$

Sei $(x_0, y_0) \in [0,1]^2 \Rightarrow x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^{k+1}}$, $y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{2^{k+1}}$ $\quad (a_k \in \{0,1\})$

Suche $t_0 \in [0,1]$, sodass $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Speziell erfüllt, wenn $f(3^n t_0) = a_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$$t_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{3^{i+1}} \quad (b_i \in \{0,1,2\})$$

$$\Rightarrow 3^n t_0 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i 3^{n-i-1} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} b_i 3^{n-i-1}}_{\in \mathbb{N}} + \frac{b_n}{3} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i \cdot 3^{n-i-1}}_{\leq 2 \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} 3^{n-i-1} = \frac{1}{3}}$$

Sei nun $b_n := 2a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow f(3^n t_0) = f\left(\frac{b_n}{3}\right) = f\left(a_n \frac{2}{3}\right) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

denn da $b_n \in \{0,2\}$ ist einerseits die 1. Summe sicher durch 2 teilbar und spielt daher aufgrund der Periodizität von f keine Rolle, andererseits ist die letzte Summe lt. Fkt.-Def. irrelevant.

$\Rightarrow t_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2a_i}{3^{i+1}}$ leistet $F(t_0) = (x_0, y_0)$, also F surjektiv.

c) $\underline{ZZ}$: $\exists t_1, t_2 \in [0,1],\ t_1 \neq t_2$ mit $F(t_1) = F(t_2)$

Sei $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$, $N \in \mathbb{N}$, $a_{2N} \neq 0$, $a_{2N+1} \neq 0$, d.g.

$$x_0 = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_{2k}}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{a}_{2k}}{2^{k+1}} \qquad \text{wobei } \tilde{a}_n := \begin{cases} a_n & n \leq 2N-1 \\ 0 & n = 2N,\ n = 2N+1 \\ 1 & n \geq 2N+2 \end{cases}$$

$$y_0 = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_{2k+1}}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{a}_{2k+1}}{2^{k+1}}$$

Seien $t_1, t_2 \in [0,1]$ geg. durch $t_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{3^{i+1}}$, $t_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{3^{i+1}}$ $(b_i, c_i \in \{0,1,2\})$.

Wissen aus b): $\begin{array}{ll} b_i := 2a_i & \forall i \in \{0, \dots, 2N+1\} \\ b_i := 0 & \forall i \geq 2N+2 \end{array} \Rightarrow F(t_1) = (x_0, y_0)$

$c_i := 2\tilde{a}_i \quad \forall i \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow F(t_2) = (x_0, y_0)$

Aber $t_1 \neq t_2$, da

$$t_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\tilde{a}_i}{3^{i+1}} = \sum_{i=0}^{2N-1} \frac{2a_i}{3^{i+1}} + \underbrace{\sum_{i=2N+2}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}}}_{= \frac{1}{3^{2N+2}}} < \sum_{i=0}^{2N+1} \frac{2a_i}{3^{i+1}} = t_1.$$

Also ~~f~~ F nicht injektiv.

Z8) $\mathcal{T} := \{O \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R}\setminus O \text{ kompakt in } (\mathbb{R}, \mathcal{E})\} \cup \{\emptyset\}$.

a)(i) $\underline{ZZ}$: $\mathcal{T}$ ist Topologie.

- $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$
- $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus O_1, \mathbb{R}\setminus O_2$ kompakt

  $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus(O_1 \cap O_2) = \mathbb{R}\setminus O_1 \cup \mathbb{R}\setminus O_2$ kompakt $\Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$
- $O_i \in \mathcal{T},\ i \in I \Rightarrow \mathbb{R}\setminus O_i$ kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$; $\mathcal{E}$ ist Hausdorff, da von $|\cdot|$ induz. $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus O_i$ abgeschlossen

  $$\Rightarrow \mathbb{R}\setminus \bigcup_{i\in I} O_i = \underbrace{\bigcap_{i \in I} \mathbb{R}\setminus O_i}_{\text{abg.}} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}\setminus O_{i_0}}_{\text{kompakt } \forall i_0 \in I} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus\bigcup_{i\in I} O_i \text{ kompakt} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$$

(ii) $\underline{ZZ}$: $\mathcal{T}$ erfüllt (T_1), d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y\ \exists \overset{x}{\underset{\cap}{O_x}}, \overset{y}{O_y} \in \mathcal{T}$ mit $y \notin O_x \wedge x \notin O_y$.

Einpunktige Mengen kompakt in $(\mathbb{R}, \mathcal{E}) \Rightarrow \mathbb{R}\setminus\{a\} \in \mathcal{T} \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Sei $x \in O_x := \mathbb{R}\setminus\{y\}$, $y \in O_y := \mathbb{R}\setminus\{x\}$, d.g. $y \notin O_x \wedge x \notin O_y$.

(iii) ZZ: τ nicht (T_2).

Ann.: τ ist (T_2), d.h. $\forall x,y \in \mathbb{R},\ x \neq y\ \exists \overset{\overset{x}{\cap}}{O_x}, \overset{\overset{y}{\cap}}{O_y} \in \tau:\ O_x \cap O_y = \emptyset$.

$O_x \cap O_y = \emptyset \Rightarrow \underbrace{O_x^c}_{\text{kompakt}} \cup \underbrace{O_y^c}_{\text{kompakt}} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ kompakt $\lightning$ da $\mathbb{R}$ nicht beschränkt. ~~$\nexists$ endl. Überdeckung von $\mathbb{R}$~~

$\Rightarrow \tau$ nicht (T_2).

b) ZZ: $[0,\infty) =: K$ kompakt in $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle$.

Sei $K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i,\ O_i \in \tau\ \forall i \in I$

Wähle ein festes O_{i_0} daraus und betrachte $C := \underbrace{O_{i_0}^c}_{\text{komp.}} \cap \underbrace{K}_{\text{abg.}}$ in $(\mathbb{R},\mathcal{E})$ $\Rightarrow C$ kompakt in $(\mathbb{R},\mathcal{E})$.

Weiters gilt: $C = K \setminus O_{i_0} \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I \\ i \neq i_0}} O_i$

Wegen $O_i \in \tau \Leftrightarrow O_i^c$ kompakt in $(\mathbb{R},\mathcal{E}) \Rightarrow O_i^c$ abg. in $(\mathbb{R},\mathcal{E}) \Rightarrow O_i \in \mathcal{E}$

ist der rechte Term eine offene Überdeckung von C.

C kompakt $\Rightarrow \exists O_1,\dots,O_n:\ C \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_i \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_i \cup O_{i_0}$, also K kompakt in τ.

ges.: Abschluss von K

$\overline{K} = \bigcap \{A \subseteq \mathbb{R} \mid K \subseteq A,\ A \text{ abg.}\} \cup \mathbb{R}$

$= \bigcap \{A \subseteq \mathbb{R} \mid K \subseteq A,\ A^c \underset{\tau}{\overset{\cap}{}} \text{offen}\} \cup \mathbb{R}$

$= \bigcap \{A \subseteq \mathbb{R} \mid K \subseteq A,\ A \text{ kompakt in } (\mathbb{R},\mathcal{E})\} \cup \mathbb{R}$

$\nexists$ kompakte Menge in $(\mathbb{R},\mathcal{E})$, die $[0,\infty)$ umfasst, da Menge unbeschr. wäre.

$\Rightarrow \overline{K} = \mathbb{R}$.

c) ges.: Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (bzgl. τ).

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ d.h. $\forall U \in \mathcal{U}(x)\ \exists N \in \mathbb{N}:\ x_n \in U\ \ \forall n > N$.

$\Updownarrow$

$U \in \mathcal{W}(x) := \{O \in \tau \mid x \in O\}$

Def. $x_n := n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ und sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Sei $O \in \mathcal{W}(x) \Rightarrow \mathbb{R}\setminus O$ kompakt in $(\mathbb{R},\mathcal{E}) \Leftrightarrow \mathbb{R}\setminus O$ beschr. u. abg.

$\Rightarrow \exists \max\{a \mid a \in \mathbb{R}\setminus O\} =: a^+$

Sei nun $n \geq \lceil a^+ \rceil$. $\Rightarrow n \notin \mathbb{R}\setminus O \Leftrightarrow n \in O$.

$\Rightarrow (n)_{n\in\mathbb{N}} \to x\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.