Analysis 3 UE

IV,

18. $\langle X, \tau\rangle$ top. Raum, $f: X \to \mathbb{R}$ stetig, $A \subseteq X$ kompakt

ZZ: $\exists a_+, a_- \in A$: $f(a_+) = \max_{x\in A} f(x)$, $f(a_-) = \min_{x\in A} f(x)$

$\left.\begin{array}{l}A \text{ kompakt}\\ f \text{ stetig}\end{array}\right\} \Rightarrow f(A)$ ist kompakt in $\mathbb{R}$ $\underset{\text{Heine-Borel}}{\Leftrightarrow}$ $f(A)$ ist beschränkt und abgeschlossen

$f(A)$ beschränkt $\Rightarrow \exists \overbrace{\sup_{x\in f(A)} x}^{=: b_+}, \overbrace{\inf_{x\in f(A)} x}^{=: b_-} \in \mathbb{R}$

Noch z.z.: $b_+, b_- \in f(A)$.

Ann.: $b_+ \notin f(A) \Rightarrow b_+ \in (f(A))^c$ offen, da $f(A)$ abg.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: (b_+ - \varepsilon, b_+ + \varepsilon) \subseteq (f(A))^c$

$\Rightarrow b_+$ kann nicht kl. obere Schranke von $f(A)$ sein $\lightning$

Analog zeigt man $b_- \in f(A)$.

$a_+ := f^{-1}(b_+)$, $a_- := f^{-1}(b_-)$ leisten nun das Gewünschte.

27. $\langle X, \preceq\rangle$ wohlgeordnete Menge, $\exists$ größtes Element in X

τ Ordnungstopologie auf $\langle X, \preceq\rangle$.

ZZ: $\langle X, \tau\rangle$ kompakt.

$\langle X, \preceq\rangle$ Wohlordnung, d.h. jede Teilmenge von X besitzt ein Minimum.

Sei $x_- := \min X$, $x_+ := \max X$.

Ann.: X nicht kompakt $\Leftrightarrow \exists$ Überd. von X durch offene Mengen ($\in \tau$), die keine endl. Teilüberd. enthält

$\Leftrightarrow \exists$ Überd. von X durch offene Intervalle, ...

Beweis der letzten Äquivalenz:

„$\Leftarrow$" Sei S die Menge aller Intervalle der Gestalt $[x_-, a), (a, b), (b, x_+]$, so bildet S (lt. Konstr.) eine Basis von τ.

$E_i \in S \Rightarrow E_i \in \tau$

„$\Rightarrow$" $O \in \tau \Rightarrow \exists E_i \in S, i \in I: O = \bigcup E_i$ (wegen Basiseigenschaft)

Wissen also: $X \subseteq \bigcup_{i\in I} E_i \;\wedge\; \nexists J \subseteq I;\ |J|<\infty:\ X \subseteq \bigcup_{j\in J} E_j$.

$\Rightarrow \exists i_1 \in I:\ x_+ \in E_{i_1} = (a_1, x_+] \overset{\Rightarrow}{} a_1 \notin E_{i_1},\ a_1 = \max(X\setminus E_1)$

$\exists i_2 \in I:\ a_1 \in E_{i_2} \Rightarrow a_2 := \max(\underbrace{X\setminus(E_{i_1}\cup E_{i_2})}_{\neq \emptyset \text{ lt. Ann.}})$

$\rightsquigarrow$ Folge $\underset{(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ mit } x_+ =: a_0}{\underset{\parallel}{(x_+, a_1, a_2, \dots)}}$ mit $x_+ > a_1 > a_2 > \dots$

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ muss unendlich sein, da sonst endl. Teilüberd. existiert.

Die Menge der Folgenglieder $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}_0\} \subseteq X$ hat (wegen der str. Monotonie)

kein Minimum ↯ zu X wohlgeordnet.

Zusammenfassend:

$\langle X, \le \rangle$ wohlgeordnet $\Rightarrow \nexists$ unendl. Folge mit $a_i > a_{i+1}$

$\Rightarrow \forall$ Überd. von X $\exists$ endl. Teilüberdeckung

$\Rightarrow X$ kompakt.

28. $X (\neq \emptyset)$ Menge, $\tau := \{A \subseteq X \mid A = \emptyset \vee |X\setminus A| < \infty\}$ (cofinite Topr.)

a) <u>ZZ:</u> τ Topologie

•) $\emptyset \in \tau,\ X \in \tau$ ✓

•) $O_1, O_2 \in \tau \overset{(i)}{\Leftrightarrow} |X\setminus O_1| < \infty \wedge |X \setminus O_2| < \infty$

$\Rightarrow |X\setminus(O_1\cap O_2)| = |(X\setminus O_1)\cup(X\setminus O_2)| < \infty$, d.h. $O_1 \cap O_2 \in \tau$

(ii) $O_1 = \emptyset$ (o.B.d.A) $\Rightarrow O_1 \cap O_2 = \emptyset \in \tau$

•) $O_i \in \tau,\ i \in I \overset{(i)}{\Rightarrow} |X \setminus \bigcup_{i\in I} O_i| = |\bigcap_{i\in I}(X\setminus O_i)| < \infty$ d.h. $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$

(ii) $O_i = \emptyset\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i = \emptyset \in \tau$

b) τ ~~Hausdorff~~? Trennungsaxiome (T_3), (T_4) erfüllt? $\langle X, \tau\rangle$ kompakt?

(i) X endlich:

$\Rightarrow \{x\} \in \tau\ \forall x \in X$

$\forall x, y \in X\ x \neq y:\ \{x\} \cap \{y\} = \emptyset \Rightarrow (T_2)$

$\forall x \in X,\ A \in \mathfrak{A},\ x \notin A:\ \underset{\tau}{\{x\}} \cap \underset{\tau}{A} = \emptyset \Rightarrow (T_3)$, da alle $A \subseteq X$ offen u. abg.

b) Trennungsaxiome (T_2), (T_3), (T_4) erfüllt? $\langle X, \tau \rangle$ kompakt?

(i) X endlich

$\Rightarrow \forall A \subseteq X$: A offen und abgeschlossen $\Rightarrow (T_2), (T_3), (T_4)$

$\langle X, \tau \rangle$ kompakt, da $\nexists$ Überdeckung durch unendl. viele versch. Mengen ($\mathcal{P}(X)$ endl.)

(ii) X unendlich

$\Rightarrow \forall O_1, O_2 \in \tau$: $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ falls $O_1 \neq \emptyset \wedge O_2 \neq \emptyset$,

⊛ da $\cancel{\emptyset \neq O_1, O_2}$ $|X \setminus O_1| < \infty$, $|X \setminus O_2| < \infty \Rightarrow |X \setminus (O_1 \cap O_2)| < \infty$
$\Rightarrow |O_1 \cap O_2| = \infty$

Es $\nexists$ nichttrivialen disjunkten offenen Mengen. $\Rightarrow$ nicht $(T_2), (T_3), (T_4)$

$\langle X, \tau \rangle$ kompakt, da

$X \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$, $O_i \in \tau$ gegeben, wähle $i_0 \in I$ beliebig

$\Rightarrow Y := X \setminus O_{i_0}$ ist endlich. $\Rightarrow \forall y \in Y \ \exists i_y \in I: y \in O_{i_y}$

$\Rightarrow X \subseteq O_{i_0} \cup \bigcup_{y \in Y} O_{i_y}$.

c) ges.: alle zusammenhängenden Teilmengen von $\langle X, \tau \rangle$.

(i) X endlich

Sei $Y \subseteq X$, $\{y_1, y_2\} \subseteq Y$. $\Rightarrow Y = \underbrace{\{y_1\}}_{\in \tau \setminus \{\emptyset\}} \cup \underbrace{(Y \setminus \{y_1\})}_{\in \tau \setminus \{\emptyset\}}$

also: nur einpunktige Mengen zusammenhängend

(ii) X unendlich

Sei $E \subseteq X$; $E \neq \emptyset$; $\exists O_1, O_2 \in \tau_E$ disjunkt: $E = O_1 \cup O_2$.

$O_1 \cap O_2 = \emptyset \overset{⊛}{\Rightarrow} O_1 = \emptyset \vee O_2 = \emptyset$

$\Rightarrow \nexists$ zusammenh. Mengen

$X\ (\neq \emptyset)$ Menge; $B(X,\mathbb{R}) := \{ f: X \to \mathbb{R} \mid \exists C>0: |f(x)| \le C \quad \forall x \in X \}$

$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)| \quad f,g \in B(X,\mathbb{R})$

$\tau_{pkt} := \tau|_{B(X,\mathbb{R})}$ (Top. d. punktw. Konv.)

τ_{d_∞} von d_∞ induz. Top. (Top. d. gleichm. Konv.)

32. a) <u>ZZ:</u> $\tau_{d_\infty} \supseteq \tau_{pkt}$

Sei $O \in \tau_{pkt}$, $f \in O$. $\Rightarrow O = \prod_{x\in X} O_x$ mit $O_x \in \mathcal{E}$, $O_x \in \mathbb{R}$ für fast alle $x \in X$

(da O Vereinigung von Basiselementen)

Sei weiters $\{O_1, \dots, O_n\} := \{O_x \mid O_x \neq \mathbb{R}\}$.

$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \exists \varepsilon_{x_i} > 0: \quad K^{|\cdot|}_{\varepsilon_{x_i}}(f) = (f(x_i)-\varepsilon_{x_i}, f(x_i)+\varepsilon_{x_i}) \subseteq O_i$

Wähle $\varepsilon_0 := \min_{1\le i\le n} \varepsilon_{x_i}$, d.g.

$g \in \prod_{x\in X} (f(x)-\varepsilon_0, f(x)+\varepsilon_0) \subseteq \prod_{x\in X} O_x = O$

$\Updownarrow$

$\sup_{x\in X} |f(x)-g(x)| = d_\infty(f,g) < \varepsilon_0$

$\Rightarrow K^{|\cdot|d_\infty}_{\varepsilon_0}(f) \subseteq O \Rightarrow O \in \tau_{d_\infty}$.

b) <u>ZZ:</u> $\tau_{d_\infty} \overset{(\subseteq)}{=} \tau_{pkt} \Leftrightarrow X$ endlich

„$\Leftarrow$" $U^{|\cdot|d_\infty}_{\varepsilon}(f) = \{ g \in B(X,\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)| < \varepsilon \}$

$= \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{\{ g \in B(X,\mathbb{R}) \mid |f(x_i)-g(x_i)| < \varepsilon \}}_{\in \tau_{pkt}} \in \tau_{pkt}$ (endl. $\cap$)

$\Rightarrow \tau_{d_\infty} \subseteq \tau_{pkt}$

„$\Rightarrow$" Zeige Kontrapos.: Sei X unendlich, betrachte $O \overset{K^{|\cdot|d_\infty}_{\varepsilon}(0)}{=} \prod_{x\in X} (-\varepsilon,\varepsilon) \in \tau_{d_\infty}$

$\pi_x(O) \neq \mathbb{R} \quad \forall x \in X \Rightarrow O \notin \tau_{pkt}$

$\Rightarrow \tau_{d_\infty} \not\subseteq \tau_{pkt}$.

33. a) <u>ZZ:</u> $|X| > \aleph_0 \Rightarrow \nexists$ Metrik d mit $\tau_d = \tau_{pkt}$

Ann.: $\tau_d = \tau_{pkt}$. Sei $f \in B(X,\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{E} := \{ U^{|\cdot|_d}_{\frac{1}{n}}(f) \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist abz. FB von $\mathcal{U}(f)$

↯ zu Bsp. 31

b) <u>ZZ:</u> $|X| = \aleph_0 \Rightarrow \exists$ Metrik d mit $\tau_d = \tau_{pkt}$, aber $\tau_{pkt} \neq \tau_{d_\infty}$

Wähle $d(f,g) = \max_{n\in X} \{ c_n d_n(f(n), g(n)) \}$ $\quad c_n \to 0$, $c_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Z3. $\langle X, \tau \rangle$ top. Raum, $E \subseteq X$.

(1) $\forall O_1, O_2 \in \tau;\ O_1 \cap O_2 = \emptyset: \quad E \subseteq O_1 \cup O_2 \Rightarrow E \subseteq O_1 \vee E \subseteq O_2$

(2) $\forall W_1, W_2 \in \tau|_E;\ W_1 \cap W_2 = \emptyset: \quad E = W_1 \cup W_2 \Rightarrow E = W_1 \vee E = W_2$

$X := \{0,1,2\} \quad \tau = \{T \subseteq X \mid \{2\} \in T\} \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{2\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

$E := \{0,1\}$

a) $\underline{ZZ}$: τ ist Topologie auf X

- $\emptyset \in \tau,\ X \in \tau$ ✓
- $O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$ ✓
- $O_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$ ✓

b) $\underline{ZZ}$: (1) ist erfüllt.

$O_1, O_2 \in \tau;\ O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow O_1 = \emptyset \vee O_2 = \emptyset$

Sei o.B.d.A. $O_1 = \emptyset \Rightarrow O_1 \cup O_2 = O_2$, d.h. $E \subseteq O_1 \cup O_2 \Leftrightarrow E \subseteq O_2$.

c) $\underline{ZZ}$: (2) ist nicht erfüllt.

$\tau|_E = \{O \cap E \mid O \in \tau\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1,0\}\}$

Gegenbsp. für (2): $W_1 = \{0\},\ W_2 = \{1\}$

$E = \{0\} \cup \{1\} \not\Rightarrow E = \{0\} \vee E = \{1\}$.

Z4. X Menge, $\langle X_i, \tau_i \rangle$ $(i \in I)$, $\langle Z_k, \mathcal{V}_k \rangle$ $(k \in K)$ top. Räume

$f_i : X \to X_i$ $(i \in I)$

$h_k : Z_k \to X$ $(k \in K)$

$$\begin{tikzcd}
\langle Z_1, \mathcal{V}_1 \rangle \arrow[dr, "h_1"] & & \langle X_1, \tau_1 \rangle \\
\langle Z_2, \mathcal{V}_2 \rangle \arrow[r, "h_2"] & \langle X, . \rangle \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "f_2"] & \langle X_2, \tau_2 \rangle \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

τ_{ini} = init. Top. auf X bzgl. $\{f_i \mid i \in I\}$

τ_{fin} = fin. Top. ——"—— $\{h_k \mid k \in K\}$

<u>ZZ:</u> Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\exists$ Topologie τ auf X mit f_i $\tau | \tau_i$-stetig $\forall i \in I$ $\wedge$ h_k $\mathcal{V}_k | \tau$-stetig $\forall k \in K$.

(ii) $\tau_{ini} \subseteq \tau_{fin}$

(iii) $f_i \circ h_k$ $\mathcal{V}_k | \tau_i$-stetig $\forall i \in I, k \in K$.

Sodann $\exists$ eine feinste u. eine gröbste Top. mit der Eigenschaft aus (i),

nämlich τ_{fin} bzw. τ_{ini}.

$(i) \Rightarrow (iii)$

Sei $O \in \tau_i$, d.g. $(f_i \circ g_k)^{-1}(O) = g_k^{-1}(\underbrace{f_i^{-1}(O)}_{\in \tau}) \in \mathcal{V}_k \quad \forall i \in I, k \in K$

~~d.h.~~ also $f_i \circ g_k$ $\mathcal{V}_k | \tau_i$-stetig $\forall i \in I, k \in K$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$

$g_k^{-1}(f_i^{-1}(\tau_i)) \in \mathcal{V}_k \quad \forall i \in I, k \in K$

$\Rightarrow f_i^{-1}(\tau_i) \in \{O \subseteq X \mid h_k^{-1}(O) \in \mathcal{V}_k\} \quad \forall i \in I, k \in K$

$\Rightarrow f_i^{-1}(\tau_i) \in \{O \subseteq X \mid h_k^{-1}(O) \in \mathcal{V}_k \ \forall k \in K\} = \tau_{fin} \quad \forall i \in I$

$\overset{\tau_{fin}\text{ Top.}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\tau_i)}_{\text{Subb. v. } \tau_{ini}} \in \tau_{fin} \Rightarrow \tau_{ini} \subseteq \tau_{fin}$

$(ii\cancel{i}) \Rightarrow (i)$

Setze $\tau = \tau_{ini}$ $\Rightarrow$ f_i sind $\tau_{ini} | \tau_i$ stetig $\forall i \in I$

Wissen: h_k sind $\mathcal{V}_k | \tau_{fin}$ stetig, $\tau_{fin} \supseteq \tau_{ini}$

$\Rightarrow$ h_k sind $\mathcal{V}_k | \tau_{ini}$ stetig $\forall k \in K$

τ_{ini} ist gröbste Top., da sonst f_i unstetig.

τ_{fin} ist feinste Top., da sonst h_k unstetig.