18.3.10

Analysis 3 UE

II, X Menge, „$\preccurlyeq$" Ordnungsrelation auf X

$S := \{(a,b) \mid a,b \in X\} \cup \{(\perp, b) \mid b \in X\} \cup \{(a,\top) \mid a \in X\}$

wobei $(a,b) := \{x \in X \mid a < x < b\}$; $(\perp, b) := \{x \in X \mid x < b\}$; $(a, \top) = \{x \in X \mid a < x\}$.

$\mathcal{B} := \{E \subseteq X \mid \exists I$ endlich, $(E_i)_{i\in I}: E_i \in S,\ E = \bigcap_{i \in I} E_i\}$.

$\mathcal{T} := \{E \subseteq X \mid \exists I, (E_i)_{i \in I}: E_i \in \mathcal{B},\ E = \bigcup_{i \in I} E_i\}$ ... „Ordnungstopologie"

13. $X = \mathbb{R}$, „$\preccurlyeq$" = „$\leq$". $\mathcal{T}$... Ordnungstopologie auf $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$
$\mathcal{E}$... euklidische Topologie

a) $\underline{\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}?}$

Sei $E \in \mathcal{E}$, $x \in E$ beliebig.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon\} = \underbrace{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}_{\in S} \subseteq E$

Die offenen Intervalle bilden Basis von $\mathcal{E}$.

$\Rightarrow \forall E \in \mathcal{E}: \quad E = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i = (a_i, b_i)$

$U_i \in S \ \forall i \in I \Rightarrow E \in \mathcal{T}$.

also $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$.

b) $\underline{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}?}$

S Subbasis von $\mathcal{T}$. $\Rightarrow \forall T \in \mathcal{T}: \ T = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J_i} S_{ij}$ mit $|J_i| < \infty \ \forall i$; $S_{ij} \in S \ \forall i,j$

Aber $S_{ij} \in \mathcal{E}$, da $(a,b) \in \mathcal{E} \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, b) \in \mathcal{E} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

$$(a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, n) \in \mathcal{E} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow T \in \mathcal{E}$, also $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}$.

14. „$\preccurlyeq$" sei Wohlordnung auf $\mathbb{R}_\infty$. $(x \preccurlyeq \infty \ \forall x \in \mathbb{R})$

$\Omega := \{\lambda \in \mathbb{R}_\infty \mid |(\bot, \lambda)| \leq \aleph_0\}$

$\Omega + 1 := \min\{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \Omega\}$.

a) Warum existiert $\Omega+1$?

$\mathbb{R}$ ist wohlgeordnet, d.h. $\forall T \subseteq \mathbb{R}$, $T \neq \emptyset$ existiert ein kleinstes Element.

$\mathbb{R} \setminus \Omega \neq \emptyset$, da $\Omega \subset \mathbb{R}$, denn angenommen $\Omega \supseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} : |(\bot, \lambda)| \leq \aleph_0$ $\quad \lightning$ zu $|\mathbb{R}| > \aleph_0$

b) ZZ: $\nexists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_n \in \Omega$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \Omega + 1$.

Sei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_n \in \Omega$ $\forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $|(\bot, \lambda_n)| \leq \aleph_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \aleph_0 \geq \left| \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (\bot, \lambda_n) \right| = |\{x \in \mathbb{R}_\infty \mid x \prec \sup\limits_n \lambda_n\}|$

$\Rightarrow \sup\limits_n \lambda_n \in \Omega$

Wegen $\lambda_n \preccurlyeq \sup\limits_n \lambda_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \preccurlyeq \sup\limits_n \lambda_n \in \Omega$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n \in \Omega$.

15. ~~a)~~ ZZ: $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\Omega+1\}$ (d.h. $\Omega \cup \{\Omega+1\}$ ist kl. abg. Menge $\supseteq \Omega$)

„$\subseteq$": Ann.: $\Omega \cup \{\Omega+1\}$ nicht abgeschlossen

$\Rightarrow \exists$ Netz $(x_i)_{i \in I}$, $x_i \in \Omega \cup \{\Omega+1\}$ $\forall i \in I$ mit

$x_i \longrightarrow \mu \notin \Omega \cup \{\Omega+1\}$

$\Rightarrow \mu \succ \Omega+1 \Rightarrow \mu \in (\Omega+1, T) \in \mathcal{T}$

~~andererseits~~ Weiters: $\lim\limits_{i \in I} x_i = \mu$ ~~d.h.~~ $\Rightarrow$ $\exists i_0 \in I$: $x_i \in (\Omega+1, T)$ $\forall i \succ i_0$

aber $x_i \in \Omega \cup \{\Omega+1\}$ lt. VS und somit Widerspruch, da

$(\Omega \cup \{\Omega+1\}) \cap (\Omega+1, T) = \emptyset$.

Also $\Omega \cup \{\Omega+1\}$ abg. $\Rightarrow \overline{\Omega} \subseteq \Omega \cup \{\Omega+1\}$

„$\supseteq$": Ω ist gerichtet bzgl. „$\preccurlyeq$". Def. Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega} = (\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ und sei $U \in \mathcal{U}(\Omega+1)$ bel.

$\Omega+1 = \min\{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \Omega\} \Rightarrow \exists \mu \in \Omega \cap U$

wegen Wohlordnung $\Rightarrow \forall \lambda \in \Omega$ mit $\lambda \succ \mu$: $x_\lambda \in U$

U bel., somit $(x_\lambda) \to \Omega+1$. $\Rightarrow \overline{\Omega} \supseteq \Omega \cup \{\Omega+1\}$

16. $\langle X, \tau \rangle$ top. Raum; $\mathcal{B}$ Basis von τ; $A \subseteq X$

<u>ZZ:</u> A dicht in X $\Leftrightarrow$ $\forall O \in \mathcal{B},\ O \neq \emptyset$: $A \cap O \neq \emptyset$
d.h. $\overline{A} = X$

„$\Rightarrow$": $\overline{A} = X \Leftrightarrow \forall O \in \tau,\ O \neq \emptyset: A \cap O \neq \emptyset$, also speziell $\forall O \in \mathcal{B}$.

„$\Leftarrow$": $\forall O \in \tau$ gilt: $O = \bigcup_{i \in I} B_i\ ,\ B_i \in \mathcal{B}$.

$$\Rightarrow A \cap O = A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(A \cap B_i)}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$ A dicht in X.

19. $\langle X, \tau \rangle$ top. Raum

Y Menge, $f: Y \to X$ bijektiv

$\mathcal{O}$ init. Topologie auf Y bzgl. $\{f\}$

ZZ: $f: \langle Y, \mathcal{O} \rangle \to \langle X, \tau \rangle$ ist Homöomorphismus.

°) f stetig, da $\mathcal{O}$ init. Topologie

°) $\mathcal{O}$ init. Top. $\Rightarrow \forall \langle X', \tau' \rangle,\ g: X' \to Y$ bel. gilt:

$g: \langle X', \tau' \rangle \to \langle Y, \mathcal{O} \rangle$ stetig g.d.w. $g \circ f: \langle X', \tau' \rangle \to \langle X, \tau \rangle$ stetig.

Wähle $\langle X', \tau' \rangle = \langle X, \tau \rangle$, $g = f^{-1}$ (Umkehrabb.):

$$\begin{tikzcd} \langle X, \tau \rangle \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1} \circ f = id"'] & \langle Y, \mathcal{O} \rangle \arrow[r, "f"] & \langle X, \tau \rangle \end{tikzcd}$$

id $\tau|\tau$-stetig $\Rightarrow f^{-1}$ stetig

also f Homöomorphismus.

20. $\langle X_i, \tau_i \rangle$ $i \in I$ top. Räume

Y Menge; $f_i : Y \to X_i$, $i \in I$ Abb.

τ init. Top. auf Y bzgl. $(f_i)_{i\in I}$.

$(f_i)_{i\in I}$ punktetrennend, d.h. $\forall a, b \in Y,\ a \neq b\ \ \exists k \in I: f_k(a) \neq f_k(b)$.

ZZ: $\langle X_i, \tau_i \rangle$ Hausdorff $\forall i \in I \Rightarrow \langle Y, \tau \rangle$ Hausdorff.

Seien $a, b \in Y$; $a \neq b$.

$\langle X_k, \tau_k \rangle$ ist Hausdorff $\Rightarrow \exists$ disjunkte offene Mengen $O_{f_k(a)}, O_{f_k(b)} \in \tau_i$

mit $f_k(a) \in O_{f_k(a)}$, $f_k(b) \in O_{f_k(b)}$.

$\begin{pmatrix} A = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(A) = \emptyset \\ \text{da } A = X \Rightarrow f^{-1}(X) = Y \end{pmatrix}$ $\emptyset = f_k^{-1}(O_{f_k(a)} \cap O_{f_k(b)}) = \underbrace{f_k^{-1}(O_{f_k(a)})}_{\in \tau} \cap \underbrace{f_k^{-1}(O_{f_k(b)})}_{\in \tau \text{, da } f_k\ \tau|\tau_k\text{-stetig.}}$

$\Rightarrow \langle Y, \tau \rangle$ ist Hausdorff.

21. $\langle Y, \tau \rangle$ top. Raum, $X \subseteq Y$, Spurtopologie $\tau|_X = \{O \cap X \mid O \in \tau\}$

a) ZZ: $x \in X$, $U \subseteq X$: U Umg. von x bzgl. $\tau|_X \Leftrightarrow \exists$ Umgebung $V \subseteq Y$ von x bzgl. τ mit $U = V \cap X$.

„$\Leftarrow$" $\exists V \in \mathcal{U}(x)$ mit $U = V \cap X$

$\Rightarrow \exists O \in \tau: \underset{x \in O}{O \subseteq V} \Rightarrow U \supseteq O \cap X \in \tau|_X$

U enth. bzgl. $\tau|_X$ offene Menge $\Rightarrow U \in \mathcal{U}_{\tau|_X}(x)$.

„$\Rightarrow$" Sei $U \in \mathcal{U}_{\tau|_X}(x) \Rightarrow \exists O \in \tau|_X: x \in O \subseteq U$

lt. Konstr. $\exists \underset{x}{\overset{\cup}{W}} \in \tau: O = W \cap X$

$\Rightarrow W \in \mathcal{U}(x)$

b) ZZ: Sei $A \subseteq X$, d.g. $\mathrm{Clos}_X(A) = X \cap \mathrm{Clos}_Y(A)$.

$\mathrm{Clos}_X(A) = \bigcap\{B \subseteq X \mid \underbrace{B \text{ abg. in } \tau|_X}_{\Leftrightarrow B = C \cap X \text{ mit } C \text{ abg. in } \tau} \wedge A \subseteq B\}$

$= \bigcap\{C \cap X \subseteq X \mid C \text{ abg. in } \tau \wedge A \subseteq C \cap X\}$

$\qquad \downarrow X \subseteq Y \qquad \downarrow A \subseteq X$

$= \bigcap\{C \cap X \subseteq Y \mid C \text{ abg. in } \tau \wedge A \subseteq C\}$

$= X \cap \bigcap\{C \subseteq Y \mid C \text{ abg. in } \tau \wedge A \subseteq C\} = X \cap \mathrm{Clos}_Y(A)$.

25. $\langle \mathbb{N}_0, \tau_{d_{(p)}} \rangle$

a) Basis von $\tau_{d_{(p)}}$ aus Mengen, die offen und abgeschlossen sind.

$\mathcal{B} = \{ B_{p^{-n}}(x) \mid x \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N}_0 \}$ ist Basis, da $O \in \tau_{d_{(p)}}$ offen

$* \{ \Leftrightarrow \forall x \in O\ \exists$ offene Kugel $K_\varepsilon(x)$ mit $K_\varepsilon(x) \subseteq O$,

was der Def. einer Basis entspricht.

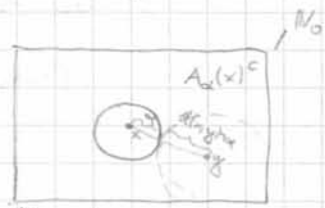
Es gilt $d_{(p)}(x,y) < p^{-n} \Leftrightarrow d_{(p)}(x,y) \le p^{-(n+1)}$.

$\Rightarrow B_{p^{-n}}(x) = \{ y \in \mathbb{N}_0 \mid d_{(p)}(x,y) < p^{-n} \} = \{ y \in \mathbb{N}_0 \mid d_{(p)}(x,y) \le p^{-n-1} \}$

Sei $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{N}_0$:

$A_\alpha(x) := \{ y \in \mathbb{N}_0 \mid d_{(p)}(x,y) \le \alpha \}$ ist abg., da

$(A_\alpha(x))^c := \{ \text{——}\,\text{"}\,\text{——} > \alpha \} = \bigcup_{y \in (A_\alpha(x))^c} B_{d_{(p)}(x,y)-\alpha}(y) \in \tau_{d_{(p)}}$



$\Rightarrow B$ offen und abgeschlossen $\forall B \in \mathcal{B}$.

b) <u>ges.:</u> alle zusammenhängenden Teilmengen von $\langle \mathbb{N}_0, d_{(p)} \rangle$.

Sei $M \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $\infty > |M| \ge 2$.

$\exists m := \min M \Rightarrow \{m\} \cap M \setminus \{m\} = \emptyset$ und $\{m\} \cup M \setminus \{m\} = M$

$\{m\}$ abg. (siehe Bsp. 7) $\Rightarrow M \setminus \{m\}$ offen

(bzgl. Spurtopologie)

$M \setminus \{m\} = \bigcup_{n \in M \setminus \{m\}} \{n\}$ abg. (endl. Durchschnitt) $\Rightarrow \{m\}$ offen

also M nicht zusammenhängend.

Sei $M = \{m\}$. $\Rightarrow M = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ impliziert $A = \emptyset$ o. $B = \emptyset$.

also $\{m\}$ zusammenhängend.

Sei $|M| = \aleph_0$. $\Rightarrow$?

---

alternativ: $|M| \ge 2$

$\{m\}$ abg. $\Rightarrow M \setminus \{m\}$ offen

$\Rightarrow M$ nicht zusammenh.

$M \setminus \{m\} = \overline{M \setminus \{m\}}$, also abg. $\Rightarrow \{m\}$ offen

26. <u>ges.:</u> Basis $\overset{\mathcal{B}}{\neq}$ von $\langle \mathbb{R}, \mathcal{E} \rangle$ aus zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen, sofern existent.

<u>Wissen:</u> $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sind immer offen und abgeschlossen, bilden aber keine Basis von $\mathcal{E}$, es muss daher noch weitere $B \in \mathcal{B}$ geben.

Sei $B_0 \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. $\Rightarrow$ auch $B_0^c \in \mathcal{B}$, da offen und abg.

Es gilt $\mathbb{R} = B_0 \cup B_0^c$ sowie $B_0 \cap B_0^c = \emptyset$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> zusammenhängend.

Zeige $\mathbb{R}$ zusammenhängend in 2 Schritten:

1) $[-n, n]$ ist zusammenhängend $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bew.:</u> Angenommen $\exists A, B \in \mathcal{E}|_{[-n,n]}$ mit $A \cup B = [-n, n]$, $A \cap B = \emptyset$.

Sei $A \neq \emptyset$. $\Rightarrow \exists \bar{a} := \sup A$

1. Fall: $\bar{a} \notin A \Rightarrow \bar{a} \in B$

B offen bzgl. $\mathcal{E}|_{[-n,n]} \Rightarrow \exists (\bar{a} - \varepsilon, \bar{a}] \subseteq B \Rightarrow \bar{a} \neq \sup A$. $\lightning$

2. Fall: $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \neq n$

A offen $\Rightarrow \exists (\bar{a} - \delta, \bar{a} + \delta) \subseteq A \Rightarrow \bar{a} \neq \sup A$ $\lightning$

also: $\bar{a} = n$

Sei $B \neq \emptyset \Rightarrow \bar{b} := \sup B = n$ (analog)

~~$\Rightarrow$ ... $\in A \cap B$~~ $\Rightarrow n \in A \cap B = \emptyset$ $\lightning$

2) Seien $(E_i)_{i \in I}$ zusammenhängende Teilmengen von $\langle \mathbb{R}, \mathcal{E} \rangle$, $\bigcap_{i \in I} E_i \neq \emptyset \Rightarrow E := \bigcup_{i \in I} E_i$ zusammenh.

<u>Bew.:</u> Sei $x \in \bigcap_{i \in I} E_i$ fest. Angenommen, E nicht zusammenhängend, d.h.

$\exists$ $E = A \cup B$ mit $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Sei (o.B.d.A) $x \in A$.

$E = A \cup B \Rightarrow E_i = \underbrace{(A \cap E_i)}_{\in \mathcal{E}|_{E_i}} \cup \underbrace{(B \cap E_i)}_{\in \mathcal{E}|_{E_i}} \quad \forall i \in I$

$(A \cap E_i) \cap (B \cap E_i) \subseteq A \cap B = \emptyset$

lt. VS: E_i zusammenh. $\Rightarrow$ eine der Mengen leer.

$x \in A \cap E_i \Rightarrow B \cap E_i = \emptyset$, gilt $\forall i \in I \Rightarrow B = B \cap E = \bigcup_{i \in I} (B \cap E_i) = \emptyset$ $\lightning$

Also $\mathbb{R} = \bigcup^{\infty} [-n, n]$ zusammenh., somit kann keine Basis dieser Bauart existieren.