Analysis 3 UE

I)

1. $\langle X, d \rangle$ metr. Raum

$$\hat{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \qquad x,y \in X.$$

<u>ZZ:</u> a) $\hat{d}$ ist Metrik auf X.

b) Es gilt $\hat{d}(x,y) \in [0,1] \quad \forall x,y \in X$.

a) 0) $\hat{d}(x,y) \geq 0$, da $d(x,y) \geq 0$

1) $\hat{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\hat{d}(x,y) = \hat{d}(y,x)$, da $d(x,y) = d(y,x)$

3) Dreiecksungleichung:

$$\hat{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \hat{d}(x,z) + \hat{d}(z,y)$$

b) $\lim\limits_{d(x,y)\to\infty} \hat{d}(x,y) = \lim\limits_{d(x,y)\to\infty} 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} = 1$

$\hat{d}(x,y)$ ist monoton $\nearrow$ in $d(x,y)$, da $\frac{d}{d[d(x,y)]}\hat{d}(x,y) = \frac{1}{(1+d(x,y))^2} > 0$.

$\Rightarrow \hat{d}(x,y) \in [0,1] \quad \forall x,y \in X.$

2. $\langle X_n, d_n \rangle$ $n \in \mathbb{N}$ metr. Räume

$(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{c}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver Zahlen mit $c_n \to 0$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n < \infty$

$d, \tilde{d} : \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)^2 \to \mathbb{R}$:

$$d(f,g) := \max_{n\in\mathbb{N}} \left[c_n \cdot \hat{d}_n(f_n, g_n) \right]$$

$$\tilde{d}(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \, \hat{d}_n(f_n, g_n)$$

$$f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad g = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

<u>ZZ:</u> $d, \tilde{d}$ sind Metriken.

0) $d(f,g) \geq 0$ ✓ $\quad d(f,g) < \infty$ ✓

$\tilde{d}(f,g) \geq 0$ ✓ $\quad \tilde{d}(f,g) < \infty$, da $\tilde{c}_n \hat{d}_n(f_n, g_n) \leq \tilde{c}_n$.

1) $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow c_n \hat{d}_n(f_n, g_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f_n = g_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f = g$

$\tilde{d}(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ analog.

2) $d(f,g) = d(g,f)$ ✓ $\quad \tilde{d}(f,g) = \tilde{d}(g,f)$ ✓

3) Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \max_n \left[c_n \, \hat{d}_n(f_n, g_n) \right] \\ &\leq \max_n \left[c_n \left(\hat{d}_n(f_n, h_n) + \hat{d}_n(h_n, g_n) \right) \right] \\ &\leq \max_n \left[c_n \, \hat{d}_n(f_n, h_n) \right] + \max_n \left[c_n \, \hat{d}_n(h_n, g_n) \right] \\ &= d(f,h) + d(h,g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}(f,g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \, \hat{d}_n(f_n, g_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \left(\hat{d}_n(f_n, h_n) + \hat{d}_n(h_n, g_n) \right)^{\leftarrow (<\infty)} \\ &= \sum_n \tilde{c}_n \, \hat{d}_n(f_n, h_n) + \sum_n \tilde{c}_n \, \hat{d}_n(h_n, g_n) \\ &= \tilde{d}(f,h) + \tilde{d}(h,g). \end{aligned}$$

Sei Primzahl p fest, dann def. den <u>p-adischen Betrag</u> von $x \in \mathbb{Z}$ als

$$|x|_p = p^{-n(p)} \text{ für } x = \pm \prod_{q \text{ prim}} q^{n(q)} \neq 0 \quad \text{bzw. } |0|_p := 0$$

sowie die <u>p-adische Metrik</u> auf $\mathbb{N}_0$

$$d_{(p)}(x,y) = |x-y|_p. \quad (x,y \in \mathbb{N}_0)$$

3. <u>ZZ:</u> $d_{(p)}$ ist tatsächlich Metrik, sogar eine Ultrametrik.

0) $d_{(p)}(x,y) \geq 0$ ✓

1) $d_{(p)}(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓

2) $d_{(p)}(x,y) = d_{(p)}(y,x)$ da $x-y$ und $-(x-y)$ dieselbe Primfaktorenzerlegung haben, nur das Signum differiert.

4) ultrametrische Dreiecksungleichung:

Bezeichne $n_r(q)$ den Exponenten von q in der Primfaktorzerlegung von r.

Es gilt

$$x+y = p^{n_{x+y}(p)} \cdot \prod_{q \neq p} q^{n_{x+y}(q)}$$

sowie

$$x+y = p^{n_x(p)} \cdot \prod_{q \neq p} q^{n_x(q)} + p^{n_y(p)} \cdot \prod_{q \neq p} q^{n_y(q)}$$

$$= p^{n_x(p) \wedge n_y(p)} \cdot (\dots) \geq p^{n_x(p) \wedge n_y(p)}$$

$$\Rightarrow p^{n_{x+y}(p)} \geq p^{n_x(p) \wedge n_y(p)}$$

$$\iff p^{-n_{x+y}(p)} \leq p^{-(n_x(p) \wedge n_y(p))} = p^{-n_x(p) \vee -n_y(p)} = p^{-n_x(p)} \vee p^{-n_y(p)}$$

$$\iff |x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

$$\Rightarrow d_{(p)}(x,z) = |x-z|_p = |x-y+y-z|_p \leq \max\{|x-y|_p, |y-z|_p\}$$

$$= \max\{d_{(p)}(x,y), d_{(p)}(y,z)\}.$$

3) Dreiecksungleichung:

folgt direkt aus 4): $d_{(p)}(x,z) \leq \max\{d_{(p)}(x,y), d_{(p)}(y,z)\} \leq d_{(p)}(x,y) + d_{(p)}(y,z)$

4. $\langle \mathbb{N}_0, d_{(p)} \rangle$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_{(p)}(x_n, x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: d_{(p)}(x_N, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Wähle $x_n = p^n$, dann gilt:

$$d_{(p)}(x_n, 0) = |x_n - 0|_p = |p^n|_p = p^{-n} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

$$d(x_n, x) = |x_n - x| = |p^n - x| \to \infty \quad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

Sei $x \in \mathbb{N}_0$, so existiert eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{k=0}^{N} a_k p^k$ mit $N \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_N \in \{0, \dots, p-1\}$, $a_N \neq 0$. („Ziffendarstellung zur Basis p").

Definiere $\pi_n: \mathbb{N}_0 \to \{0, \dots, p-1\}$
$\quad x \mapsto a_n \qquad (n \in \mathbb{N},\ a_n = 0 \ \forall n > N)$.

5. ZZ: $\pi_n: \langle \mathbb{N}_0, d_{(p)} \rangle \to \langle \{0, \dots, p-1\}, d \rangle$ stetig

wobei $d(x,y) = \mathbb{1}_{[x \neq y]}$ (diskrete Metrik)

Es genügt, die Stetigkeit auf Basen des Umgebungsfilters von $a \in \mathbb{N}_0$ bzw. $\pi_n(a)$ zu zeigen, also auf den offenen Kugeln, d.h. $\forall a \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \pi_n(U_\delta(a)) \subseteq U_\varepsilon(\pi_n(a))$$

Sei in der Folge a fest und $\varepsilon < 1$. $\Rightarrow U_\varepsilon(\pi_n(a)) = \{\pi_n(a)\}$

Für passendes δ muss also gelten:

$$b \in U_\delta(a) \Rightarrow \pi_n(b) = \pi_n(a) \Leftrightarrow a_n - b_n = 0$$

Wähle $\delta = p^{-n}$, d.g.: $U_\delta(a) = \{b \in \mathbb{N}_0 \mid |a-b|_p < p^{-n}\}$

$$= \{b \in \mathbb{N}_0 \mid |a-b|_p \leq p^{-(n+1)}\}$$

Mit anderen Worten: $\forall b \in U_\delta(a)$ gilt, dass $a-b$ durch p^{n+1} teilbar ist.

Damit folgt:

$$\underbrace{a-b}_{\text{d. } p^{n+1} \text{ tb.}} = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i - b_i) p^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) p^i}_{\leq \sum_{i=0}^{n} (p-1) p^i < p^{n+1}, \text{ also nicht durch } p^{n+1} \text{ teilbar}} + \overbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} (a_i - b_i) p^i}^{\text{d. } p^{n+1} \text{ tb.}}$$

Also muss gelten: $a_i - b_i = 0 \ \forall i \in \{0, \dots, n\} \Rightarrow a_n - b_n = 0$. $\square$

6. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_k \in \mathbb{Z}\ \forall k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k \ , \ n\in\mathbb{N}_0$$

a) <u>ZZ:</u> S_n ist Cauchyfolge in $\langle \mathbb{N}_0, d_{(p)}\rangle$, d.h.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: d_{(p)}(S_i,S_j)<\varepsilon \quad \forall i,j>N$$

Sei o.B.d.A. $i>j$. $\Rightarrow$ $S_i - S_j = \sum_{k=j+1}^{i} a_k p^k$

Wegen $i,j>N$ ist $S_i - S_j$ sicher durch p^N teilbar, also

$d_{(p)}(S_i,S_j) = |S_i - S_j|_p \le p^{-N}$

$\Rightarrow d_{(p)}(S_i,S_j) < \varepsilon$ für $\varepsilon > p^{-N}$.

b) <u>ZZ:</u> $\langle \mathbb{N}_0, d_{(p)}\rangle$ ist nicht vollständig.

Wähle $a_k = p-1\ \forall k\in\mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n}(p-1)p^k = (p-1)\sum_{k=0}^{n} p^k = (p-1)\frac{p^{n+1}-1}{p-1} = p^{n+1}-1$

Aber $d_{(p)}(p^{n+1}-1, -1) = |p^{n+1}|_p = p^{-(n+1)} \to 0$,

also $S_n \to -1 \notin \mathbb{N}_0$.

7. $\langle X, \tau\rangle$ top. Raum, Hausdorff ; $x\in X$.

a) <u>ZZ:</u> $\bigcap_{U\in\mathcal{U}(x)} U = \{x\}$

„$\supseteq$": klar

„$\subseteq$": indirekter Beweis: Seien $x,y \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}(x)} U$, $x\neq y$.

Dann existieren laut VS Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V\in\mathcal{U}(y)$

mit $U\cap V = \emptyset$.

Somit ist $y\notin U$ und $y \notin \bigcap_{U\in\mathcal{U}(x)} U$. $\lightning$

b) <u>ZZ:</u> $\{x\}$ ist abgeschlossen.

Wissen: $\{x\}$ abg. $\Leftrightarrow$ $\{x\}^c$ offen.

Sei $y\in\{x\}^c$ bel. $\Rightarrow$ $\exists$ offene Menge O_y mit $x\notin O_y$

$$\{x\}^c = \bigcup_{y\in\{x\}^c}\{y\} \subseteq \underbrace{\bigcup_{y\in\{x\}^c} O_y}_{\not\ni\{x\}} \subseteq \{x\}^c \quad\Rightarrow \{x\}^c \in \tau.$$

Menge $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ∞ formales Symbol.

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \le b\} \cup \{\mathbb{R}_\infty \setminus [a,b] \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \le b\}$$

$$\tau := \{E \subseteq \mathbb{R}_\infty \mid \exists I,\ \underset{E_i \in \mathcal{B}\ \forall i}{(E_i)_{i \in I}}:\ E = \bigcup_{i \in I} E_i\}$$

8. a) ZZ: τ ist Topologie.

1) $\emptyset \in \tau$ für $I = \emptyset$

$\mathbb{R}_\infty \in \tau$, da $\mathbb{R}_\infty \in \mathcal{B}_2$

3) $O_i \in \tau\ \forall i \in I \Rightarrow O_i = \bigcup_{j \in J_i} E_{i,j} \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} E_{i,j} \in \tau.$

2) $O_1, O_2 \in \tau$, d.h. $O_1 = \bigcup_{i \in I_1} E_{1i}$, $O_2 = \bigcup_{j \in I_2} E_{2j}$

$$\Rightarrow O_1 \cap O_2 = \bigcup_{i \in I_1} E_{1i} \cap \bigcup_{j \in I_2} E_{2j} = \bigcup_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}} (E_{1i} \cap E_{2j})$$

noch ZZ: $E_{1i} \cap E_{2j} \in \tau$ ($\Rightarrow$ lt. 3) $O_1 \cap O_2 \in \tau$).

1. Fall: $E_{1i} =: E_1 \in \mathcal{B}_1$; $E_{2j} =: E_2 \in \mathcal{B}_1$

$E_1 = (a_1, b_1)$
$E_2 = (a_2, b_2)$ $\Rightarrow E_1 \cap E_2 = (a_1 \vee a_2,\ b_1 \vee b_2) \in \mathcal{B} \subseteq \tau.$

2. Fall: $E_1 \in \mathcal{B}_1$; $E_2 \in \mathcal{B}_2$ (o.B.d.A)

$E_1 = (a_1, b_1)$
$E_2 = (-\infty, a_2) \cup (b_2, \infty) \cup \{\infty\}$

$$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = [(-\infty, a_2) \cap (a_1, b_1)] \cup [(a_1, b_1) \cap (b_2, \infty)]$$
$$= (a_1 \wedge a_2,\ b_1 \wedge a_2) \cup (a_1 \vee b_2,\ b_1 \vee b_2) \in \tau$$

3. Fall: $E_1, E_2 \in \mathcal{B}_2$

$E_1 = (-\infty, a_1) \cup (b_1, \infty) \cup \{\infty\}$
$E_2 = (-\infty, a_2) \cup (b_2, \infty) \cup \{\infty\}$

$$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = (-\infty, a_1 \wedge a_2) \cup [(-\infty, a_1) \cap (b_2, \infty)] \cup [(-\infty, a_2) \cap (b_1, \infty)] \cup (b_1 \vee b_2, \infty) \cup \{\infty\}$$
$$= (-\infty, a_1 \wedge a_2) \cup (b_2, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup (b_1 \vee b_2, \infty) \overset{\{\infty\}}{\cup} \in \tau,$$

da $(-\infty, a_1 \wedge a_2) \cup (b_1 \vee b_2, \infty) \overset{\{\infty\}}{\cup} \in \mathcal{B}_2$

Anmerkung: $(a, b) := \emptyset$ für $a > b$.

b) ZZ: τ ist Hausdorff.

1. Fall: Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$.

Dann existieren Intervalle $U_\varepsilon := (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \tau$, $V_\delta := (y-\delta, y+\delta) \in \tau$

$(\varepsilon > 0, \delta > 0)$ mit $U_\varepsilon \cap V_\delta = \emptyset$.

z.B. für $\varepsilon, \delta < \frac{1}{2}|x-y|$

2. Fall: Sei o.B.d.A $x \in \mathbb{R}$, $y = \{\infty\}$.

Wähle U_ε w.o., $V_\delta := \mathbb{R}_\infty \setminus [-\delta, \delta] \in \tau$

$\Rightarrow U_\varepsilon \cap V_\delta = \emptyset$ für $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq [-\delta, \delta] \Leftrightarrow \delta \geq \max\{|x-\varepsilon|, |x+\varepsilon|\}$.

c) ges.: Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$ in $\langle \mathbb{R}_\infty, \tau \rangle$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, d.h. $\forall B \in \mathcal{B}_2 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n \geq N \Rightarrow x_n \in B$.

(Es genügt, die Konvergenz auf einer Filterbasis zu zeigen; $\mathcal{B}_2$ ist FB v. $\mathcal{U}(\infty)$.)

Wähle $x_n = n$. Wegen $B = \mathbb{R}_\infty \setminus [a, b]$ gilt das Konvergenzkriterium für $N > b$.

Anmerkung: Grenzwert eindeutig, da T_2-Raum.

9. $\langle X, \tau \rangle$, $\langle Y, \mathcal{O} \rangle$ top. Räume; $\mathcal{V}$ Subbasis von $\mathcal{O}$; $f: X \to Y$

ZZ: f stetig $\Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \tau \quad \forall V \in \mathcal{V}$.

„$\Rightarrow$" f stetig, d.h. $\forall O \in \mathcal{O}$: $f^{-1}(O) \in \tau$, also speziell $\forall V \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}$.

„$\Leftarrow$" $\forall O \in \mathcal{O}$ gilt:

$$O = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in I_i} V_{ij} \text{ mit } |I_i| < \infty, \; V_{ij} \in \mathcal{V}.$$

Also gilt aufgrund der Operationstreue des Urbildes:

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in I_i} \underbrace{f^{-1}(V_{ij})}_{\in \tau} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \tau, \text{ also } f \text{ stetig.}$$