Einige Übungsbeispiel–Lösungen

Lukas Neumann

15.04.2008

Beispiel 10: $f :< X, \mathcal{T} > \rightarrow < Y, \mathcal{O} >$ bijektiv
z.z.: f ist Homöomorphismus $\Leftrightarrow \forall x \in X : f(\mathcal{U}_\mathcal{T}(x)) = \mathcal{U}_\mathcal{O}(f(x))$

"$\Leftarrow$"
(1) Wir zeigen f stetig:
Sei $x \in X$, $V \in \mathcal{U}_\mathcal{O}(f(x))$ beliebig, dann gibt es nach Voraussetzung ein $U \in \mathcal{U}_\mathcal{T}(x)$: $f(U) = V$. Damit ist f nach 1.3.3. in x stetig.

(2) f^{-1} stetig:
Sei $y \in Y$, $V \in \mathcal{U}_\mathcal{T}(f^{-1}(y))$ beliebig. Da f bijektiv und nach Voraussetzung:

$$\mathcal{U}_\mathcal{T}(f^{-1}(y)) = f^{-1}(f(\mathcal{U}_\mathcal{T}(f^{-1}(y)))) = f^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{O}(y))$$

Damit gibt es zu V ein $U \in \mathcal{U}_\mathcal{O}(y)$ mit $f^{-1}(U) = V$ und f^{-1} ist nach 1.3.3. stetig in y.

"$\Rightarrow$"
(1) z.z. $\mathcal{U}_\mathcal{O}(f(x)) \subseteq f(\mathcal{U}_\mathcal{T}(x))$:
Seien $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}_\mathcal{O}(f(x))$ beliebig. f stetig $\Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}_\mathcal{T}(x) : f(U) \subseteq V$.
f surjektiv $\Rightarrow \exists \tilde{U} \supseteq U$ mit $f(\tilde{U}) = V$. Als Obermenge einer Umgebung ist (1.1.5. – F3) aber auch $\tilde{U}$ Umgebung von x.
Damit haben wir zu beliebigem $V \in \mathcal{U}_\mathcal{O}(f(x))$ ein $\tilde{U} \in \mathcal{U}_\mathcal{T}(x)$ mit $f(\tilde{U}) = V$ gefunden.

(2) z.z. $f(\mathcal{U}_\mathcal{T})(x) \subseteq \mathcal{U}_\mathcal{O}(f(x))$:
Sei $x \in X$ und $V \in \mathcal{U}_\mathcal{T}(x)$ beliebig. Sei weiters $y = f(x)$. Wegen der Stetigkeit von f^{-1} gibt es zu V (V ist ja in $\mathcal{U}_\mathcal{T}(f^{-1}(y))$) ein $U \in \mathcal{U}_\mathcal{O}(y)$ mit $f^{-1}(U) \subseteq V$.
Da f bijektiv ist $\exists \tilde{U} \supseteq U : f^{-1}(\tilde{U}) = V$. Als Obermenge einer Umgebung ist auch $\tilde{U} \in \mathcal{U}_\mathcal{O}(y)$. Wendet man f an so erhält man $f(V) = f(f^{-1}(\tilde{U})) = \tilde{U}$.
Damit haben wir zu jedem $V \in \mathcal{U}_\mathcal{T}(x)$ ein $\tilde{U} \in \mathcal{U}_\mathcal{O}(f(x))$ mit $f(V) = \tilde{U}$ gefunden.

Beispiel 14: Zeige, dass es keine Folge in Ω mit Grenzwert $\Omega+1$ gibt.

$\Omega+1$ existiert, da wir $\mathbb{R}$ wohlgeordnet haben und weil das Komplement von Ω nichtleer ist da sonst $\mathbb{R}$ abzählbar wäre.
Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von Elementen in Ω. Dann sind die Mengen $A_n := \{x \in \mathbb{R}_\infty | x \prec \lambda_n\}$ abzählbar. Weil $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen) abzählbar ist gilt insbesondere $\sup \lambda_n \in \Omega$. Damit kann es aber keine Folge von Elementen in Ω geben, die gegen $\Omega+1$ konvergiert.

Beispiel 15:
Zeige $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\Omega+1\}$ und finde ein Netz in Ω, dass gegen $\Omega+1$ konvergiert.

(1) Wir zeigen $\Omega \cup \{\Omega+1\}$ ist abgeschlossen und damit (1.2.3.) $\overline{\Omega} \subseteq \Omega \cup \{\Omega+1\}$:
Angenommen $\Omega \cup \{\Omega+1\}$ wäre nicht abgeschlossen $\overset{1.2.7.}{\Rightarrow}$ $\exists$ Netz $(x_i)_{i\in I}$ von Elementen aus $\Omega \cup \{\Omega+1\}$ mit Grenzwert $\mu \notin \Omega \cup \{\Omega+1\}$. Da aber dann $\mu \succ \Omega+1$ folgt und laut Definition der Ordnungtopologie $(\Omega+1, \top)$ eine offene Umgebung von μ ist müsste wegen $\lim x_i = \mu$ gelten: $\exists i_0 : \forall i \rhd i_0 : x_i \in (\Omega+1, \top)$.
Weil aber $(\Omega \cup \{\Omega+1\}) \cap (\Omega+1, \top) = \emptyset$ ergibt sich ein Wiederspruch zu $\forall i \in I : x_i \in \Omega \cup \{\Omega+1\}$.

(2) Das Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega} = \lambda$ konvergiert gegen $\Omega+1$ (und damit ist nach 1.2.7. $\overline{\Omega} \supseteq \Omega \cup \{\Omega+1\}$):
Sei $U \in \mathcal{U}(\Omega+1)$ beliebig. Dann liegt in U ein $\mu \in \Omega$ da sonst $\Omega+1$ nicht das kleinste Element außerhalb Omegas sein kann. Damit gilt aber $\forall \lambda \succeq \mu : x_\lambda \in U$ und das Netz konvergiert.

Aus Beispiel 14 und 15 sieht man, dass Ω folgenvollständig aber nicht vollständig ist. Der Grund ist, dass $\Omega+1$ keine abzählbare Umgebungsbasis hat.

Beispiel 16: Zeige: $A \subset X$ dicht $\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{B}, A \neq \emptyset : A \cap O \neq \emptyset$.

"$\Rightarrow$": klar weil $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ (z.B.: 1.4.1.)

"$\Leftarrow$" (eigentlich $\neg \Rightarrow \neg$): Angenommen $\exists O \in \mathcal{T}, O \neq \emptyset : A \cap O = \emptyset$.
Da $O \overset{1.4.4.}{=} \bigcup\{B \in \mathcal{B} | B \subseteq O\}$ folgt aber $(O \neq \emptyset)$: $\exists B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset : A \cap B = \emptyset$.

Beispiel 25: Finde eine Basis der Topologie auf $\mathbb{N}_0$ mit p-adischer Metrik, die aus Mengen besteht, die offen und abgeschlossen sind und bestimme die zusammenhängenden Teilmengen.

(1) Die Menge $\mathcal{B} = \{B_{p^{-n}}(x) | x \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Basis der Topologie (z.B.: 1.4.2. nachrechnen und überlegen, dass auch feiner als die metrische Topologie).
Da aber $d(x,y) < p^{-n} \Leftrightarrow d(x,y) \leq p^{-(n+1)}$ ist gilt auch $\mathcal{B}_{p^{-n}}(x) = \{y \in \mathbb{N}_0 | d(x,y) < p^{-n}\} = \{y \in \mathbb{N}_0 | d(x,y) \leq p^{-(n+1)}\}$ offen und abgeschlossen.
Überlege dazu, dass im metrischen Raum X zu bel. $\alpha > 0$, $x \in X$ die abgeschlossene Kugel $A_\alpha(x) := \{y \in X | d(x,y) \leq \alpha\}$ abgeschlossen ist weil $\mathcal{C}(A_\alpha(x)) = \{y \in X | d(x,y) > \alpha\} = \bigcup_{y \in \mathcal{C}(A_\alpha(x))} B_{(d(x,y)-\alpha)/2}(y)$ ist.

(2) bestimme die Zusammenhangskomponenten:
Seien $n_1 \neq n_2$ aus $\mathbb{N}_0$ beliebig.
Metrischer Raum ist hausdorff'sch $\Rightarrow$ $\exists O_1$ offene Umgebung von n_1 und O_2 offene Umgebung von n_2 mit $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Da aber $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie ist gibt es nach 1.4.4. $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ mit $n_1 \in B_1 \subset O_1$ und $n_2 \in B_2 \subset O_2$. Für diese gilt klarerweise $\emptyset = B_1 \cap B_2 = \overline{B_1} \cap B_2 = B_1 \cap \overline{B_2}$.
Damit ist jede Menge, die zumindest zwei Elemente enthält nicht zusammenhängend. Man sagt der Raum ist total unzusammenhängend.

Beispiel 26: Gibt es eine Basis der euklidschen Topologie auf $\mathbb{R}$, die aus Mengen besteht die abgeschlossen und offen sind?

(1) Wir zeigen zuerst, dass dann $\mathbb{R}$ unzusammenhängend wäre:
Angenommen $\mathcal{B}$ ist Basis aus offenen und abgeschlossenen Mengen. Dann gibt es ein B_0 in $\mathcal{B}$ mit $\emptyset \neq B_0 \neq \mathbb{R}$ (sonst kann $\mathcal{B}$ höchstens Basis der Klumpentopologie sein). Dann ist aber auch das Komplement $\mathcal{C}(B_0)$ abgeschlossen und offen und $\mathbb{R} = B_0 \cup \mathcal{C}(B_0)$. Da weiters natürlich $\emptyset = B_0 \cap \mathcal{C}(B_0)$ gilt ist $\mathbb{R}$ nicht zusammenhängend.

(2) Wir zeigen $[0,1]$ ist zusammenhängend:
Angenommen es gäbe nichtleere $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $[0,1] = A \cup B$ und $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$.
Dann o.B.d.A.: $\exists x \in A, y \in B : x < y$ (sonst $A \leftrightarrows B$). Seien solche x, y gewählt.
Da $A \cup B = [0,1]$ und $\overline{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow B = \mathcal{C}_{[0,1]}(\overline{A})$ ist offen in $[0,1]$. Analog ist auch A offen in $[0,1]$.
Da aber auch $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = [0,1]$ gilt folgt, dass $B = \mathcal{C}_{[0,1]}(A)$ abgeschlossen in $[0,1]$ ist und analog B abgeschlossen in $[0,1]$.
Weil $[0,1]$ abgeschlossen ist sind A und B auch abgeschlossen in ganz $\mathbb{R}$.
(A abg. in $[0,1] \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}$, C abgeschlossen in $\mathbb{R}$, sodass $A = C \cap [0,1]$. Dann ist aber A auch als Teilmenge von $\mathbb{R}$ abgeschlossen, da es Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Mengen ist.)

Sei nun $\overline{a} := \sup A \cap [x, y] = \max A \cap [x, y] \ni A \cap [x, y]$.
Weiters sei $\underline{b} := \inf B \cap [\overline{a}, y] = \min B \cap [\overline{a}, y] \ni B \cap [\overline{a}, y]$.
Falls $\overline{a} = \underline{b}$ so wiederspricht das $B \cap A = \emptyset$
Ist aber $\overline{a} < \underline{b}$, so ist $(\overline{a} + \underline{b})/2 \notin A \cup B$.

(3) Alle abgeschlossenen Intervalle sind zusammenhängend (analoger Beweis zu (2) oder [a,b] ist stetiges Bild von [0,1] unter der Abbildung $x \mapsto a+(b-a)x$) und 1.7.2.). Schreibt man $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$ und wendet 1.7.3. an, so folgt, dass auch $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist. Mit (1) schließt man dann, dass es keine Basis aus Mengen die abgeschlossen und offen sind geben kann.

Im Übrigen kann man mit diesen Überlegungen auch leicht zeigen, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind. So ist zum Beispiel $[0, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, a - 1/n]$, und $[0, \infty)$ Bild von $[0, a)$ unter der Abbildung $x \mapsto 1/(a - x) - 1/a$. Ist andererseits eine Menge M kein Intervall, so gibt es $x < y < z$ mit $x, z \in M$ und $y \notin M$. Dann lassen sich aber die Mengen $M \cap (-\infty, y)$ und $M \cap (y, \infty)$ durch $(-\infty, y)$ und (y, ∞) trennen und M ist nicht zusammenhängend.