15.6.09

Analysis UE

XII) 262, 270, 274, 278, 282, 286, 290

262) $f(x,y) = \arctan x + \arctan y$

$g(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy$$
$$= \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

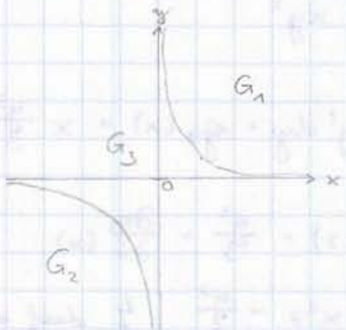
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy+(x+y)y}{(1-xy)^2}$$
$$= \frac{\cancel{(1-xy)^2}\,(1+y^2)}{((1-xy)^2+(x+y)^2)\cdot\cancel{(1-xy)^2}} = \frac{1+y^2}{1+x^2+x^2y^2+y^2} = \frac{\cancel{1+y^2}}{\cancel{(1+y^2)}(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \quad xy \neq 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$\Rightarrow dg(x,y) = \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{1+y^2}\,dy \qquad xy \neq 1$$

f, g auf ihren Definitionsbereichen diffbar, Differentiale $\forall$ auf einer offenen, zusammenhängenden Teilmenge gleich $\Rightarrow$ f und g unterscheiden sich dort nur um eine additive Konstante

Die angesprochenen Gebiete sind $G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{x} > 0\}$, $G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \frac{1}{x} < 0\}$, $G_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \notin \overline{G_1} \cup \overline{G_2}\}$ bzw. „Untergebiete" davon.



270) $\omega(x,y,z) = (e^y + 2x\cdot e^{x^2} z)\,dx + (x\cdot e^y + \frac{1}{y})\,dy + (e^{x^2} + \frac{1}{z})\,dz$

1. Schritt:
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = e^{x^2} + \frac{1}{z}$$
$$\Rightarrow f(x,y,z) = \int e^{x^2} + \frac{1}{z}\,dz + g_1(x,y)$$
$$= e^{x^2} z + \ln|z| + g_1(x,y)$$

2. Schritt:
$$x e^y + \frac{1}{y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = x e^y + \frac{1}{y}$$

3. Schritt:
$$g_1(x,y) = \int x e^y + \frac{1}{y}\,dy + g_2(x)$$
$$= x e^y + \ln|y| + g_2(x)$$

4. Schritt:
$$e^y + 2x\cdot e^{x^2} z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{x^2} z + \ln|z| + \overbrace{x e^y + \ln|y| + g_2(x)}^{g_1(x,y)}\Big)$$
$$= 2x e^{x^2} z + e^y + \frac{\partial g_2}{\partial x}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x}(x) = 0$$

also: $f(x,y,z) = e^{x^2} z + \ln|z| + x e^y + \ln|y|$

274) $\omega(x,y,z) = x^2 z\,dz + xy^2\,dy + z\,dz$

1. Schritt:
$$f(x,y,z) = \int z\,dz + g_1(x,y) = \frac{z^2}{2} + g_1(x,y)$$

2. Schritt:
$$xy^2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = xy^2$$

3. Schritt:
$$g_1(x,y) = \int xy^2\,dy + g_2(x) = x\,\frac{y^3}{3} + g_2(x)$$

4. Schritt:
$$x^2 z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y^3}{3} + \frac{\partial g_2}{\partial x}(x)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial g_2}{\partial x}(x) = x^2 z - \frac{y^3}{3}$$ ↯ darf nur mehr von x abhängen!

also: $\nexists$ Stammfunktion

278)
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Part. Abl. 1. Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4-y^4)+2x^2y\cdot 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=y\cdot\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^4-y^4)-2xy^2\cdot 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=x\,\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\lambda\to0}\frac{f(0+\lambda,0)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{0}{\lambda}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{df}{d(x,y)}(x,y)=\left(y\,\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},\ x\,\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{df}{d(x,y)}(0,0)=(0,0)$$

Part. Abl. 2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x,y)=y\cdot\frac{(4x^3+8xy^2)(x^2+y^2)^{\cancel{2}}-(x^4+4x^2y^2-y^4)2\cancel{(x^2+y^2)}2x}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}3}}$$

$$=y\cdot\frac{-4x^3y^2+12xy^4}{(x^2+y^2)^3}=4xy^3\,\frac{3y^2-x^2}{(x^2+y^2)^3}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\ldots=4x^3y\,\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3}\qquad \text{— " —}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}+y\,\frac{(8x^2y-4y^3)(x^2+y^2)^{\cancel{2}}-(x^4+4x^2y^2-y^4)2\cancel{(x^2+y^2)}2y}{(x^2+y^2)^{\cancel{4}3}}$$

$$=\text{— " —}+y\,\frac{4x^4y-12x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}\qquad (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\qquad \text{— " —}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{\lambda\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{0}{\lambda}=0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$ analog.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{\lambda\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\lambda)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda\cdot\frac{-\lambda^4}{\lambda^4}}{\lambda}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{\lambda\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to0}\frac{\lambda\cdot\frac{\lambda^4}{\lambda^4}}{\lambda}=1$$

$\neq$ ⇒ f in $(0,0)$ nicht $2\times$ differbar!

282) $f(x,y) = e^{xy}$

$$\frac{df}{d(x,y)} = \left(y e^{xy},\ x e^{xy} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}(x,y) = y^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(x,y) = e^{xy} + xy e^{xy} = e^{xy}(1+xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{xy}(1+xy)$$

$$\Rightarrow d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy}(1+xy) \\ e^{xy}(1+xy) & x^2 e^{xy} \end{pmatrix}$$

$D(d^2 f) = \mathbb{R}^2, \quad d^2 f(\mathbb{R}^2) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

286)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bestimme $\frac{df}{d(x,y)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3y^3 x^2 \sqrt{x^2+y^2} - x^3 y^3 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2 y^3 (2x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda,0) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{0}{|\lambda|}}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{df}{d(x,y)}(x,y) = \left(\frac{x^2 y^3 (2x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{x^3 y^2 (2y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{df}{d(x,y)}(0,0) = (0,\ 0)$$

Diffbarkeit der part. Abl.

als Zusammensetzung diffbarer Fkt. auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ diffbar.

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda h_1, \lambda h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda^3 (\lambda^2 (2h_1^2 + 3h_2^2))}{|\lambda|^3 (\sqrt{h_1^2+h_2^2})^3 (\pm 1)}}{\lambda} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \leq \frac{\|(h_1,h_2)\|^{4} \cdot 5 \cdot \|(h_1,h_2)\|^2}{\|(h_1,h_2)\|^3}} \to 0 \text{ für } (h_1,h_2) \to (0,0)$$

$$\lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(h_1,h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - 0\right|}{\|(h_1,h_2)\|} \leq \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{\|(h_1,h_2)\|^5 \cdot 5 \cdot \|(h_1,h_2)\|^2}{\|(h_1,h_2)\|^4} = 0$$

also f auf ganz $\mathbb{R}^2$ 2× diffbar.

290) $f(x,y) = \left(x^2 y,\ x^2 + \frac{1}{y^2}\right) \quad \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

f an a stetig diffbar, $df(a)$ bijektiv ($\Leftrightarrow \det \frac{df}{dx}(a) \neq 0$) $\Rightarrow f$ an a lokal eind. umkehrb,

Umkehrabb. an $f(a)$ diffbar.

f ~~an a~~ auf off. Teilmenge T stetig diffbar $\Leftrightarrow \frac{df}{dx}$ auf T stetig.

$$\frac{df}{d(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ x^2 & -\frac{2}{y^3} \end{pmatrix} \qquad y \neq 0$$

alle part. Abl. auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\}\ \forall x \in \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ dort stetig diffbar.

$$\det \frac{df}{d(x,y)}(x,y) = -\frac{4x}{y^2} - 2x^3 = x\left(-\frac{4}{y^2} - 2x^2\right)$$

$$\text{——} \text{"} \text{——} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$\Rightarrow f$ an $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal eindeutig umkehrbar, wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$;

Umkehrfkt. diffbar.

$y = 0 \Rightarrow f$ nicht def. $\Rightarrow \nexists$ Umkehrfkt.

$x = 0 \Rightarrow$ Umkehrfkt. muss leisten: $\left(0, \frac{1}{y^2}\right) \longmapsto (x, y)$ nicht eindeutig für $x \in$ Umgebung.

Globale eindeutige Umkehrbarkeit von f:

Sei $(a,b) \in f(\mathbb{R}^2)$ gegeben, gesucht $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (a,b)$

$a = x^2 y \Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{y} \quad \Rightarrow \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} a$

$b = x^2 + \frac{1}{y^2} \quad \Rightarrow b > 0$

$\Rightarrow b = \frac{a}{y} + \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow by^2 - ay - 1 = 0$

$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2b}$

1. Lösung:

$$y_1 = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2b} \geq \frac{a + \sqrt{a^2}}{2b} = \frac{a + |a|}{2b} \geq 0$$

2. Lösung:

$$y_2 = \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2b} \leq \frac{a - \sqrt{a^2}}{2b} = \frac{a - |a|}{2b} \leq 0$$

$\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} y \Rightarrow y$ eindeutig bestimmt $\forall a \in \mathbb{R}$

$x^2 = \frac{a}{y} \Rightarrow$ nur auf jeder Teilmenge von $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ u. $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ global eind. umkehrbar

$\Rightarrow f$ auf jeder Teilmenge v. $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \mathbb{R})$ u. $(\mathbb{R}^- \cup \{0\}, \mathbb{R})$ global eind. umkehrbar.