25.1.09

Analysis UE

$\underline{XIII}$, 345, 348, 351, 354, 359, 360, 362, 368

345) $$\tanh' = \left(\frac{\sinh}{\cosh}\right)' = \frac{\sinh'\cosh - \sinh\cosh'}{\cosh^2} = \frac{\cosh^2-\sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2}$$

$$\sin(\arcsin x) = x \Rightarrow \sin'(\arcsin x)\cdot\arcsin' x = 1$$

$$\Leftrightarrow \arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$\cos^2+\sin^2=1$
$\Leftrightarrow \cos^2 = \sqrt{1-\sin^2}$
$$\Rightarrow = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}$$

$$\overset{\sin(\arcsin x)=x}{\Rightarrow} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

348) $$(\ln|f|)' = \ln'|f|\cdot|f'| = \frac{1}{|f|}\cdot|f'| = \left|\frac{f'}{f}\right|$$

$$(\operatorname{arcosh}(1+f^2))' = \operatorname{arcosh}'(1+f^2)\cdot(f'f+ff')$$

$$= \frac{2ff'}{\sqrt{(1+f^2)^2-1}} = \frac{2ff'}{\sqrt{2f^2-f^4}} = \frac{2f'}{\sqrt{2+f^2}}$$

351) $$f(x) = \begin{cases} x^k\cdot\sin(x^{-n}) & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad (k,n\in\mathbb{N})$$

$$f'(x) = \begin{cases} k\cdot x^{k-1}\cdot\sin(x^{-n}) + x^k\cdot\cos(x^{-n})\cdot(-n)\,x^{-n-1} & \forall x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$f(x)$ diffbar auf max. Def.-Bereich $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, da Komposition von (unendlich oft) diffbaren Funktionen.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0^{k-1}\cdot k\cdot\sin\left(\frac{1}{0^n}\right) - 0^{k-n-1}\cdot n\cdot\cos\left(\frac{1}{0^n}\right)$$

$$= \underbrace{0^{k-1}\cdot k\cdot\sin(\infty)}_{\substack{\sin(\infty)\text{ für } k=1 \\ 0 \text{ für } k\geq 2}} - \underbrace{0^{k-n-1}\cdot n\cdot\cos(\infty)}_{\substack{\infty \text{ für } k-n-1<0 \Leftrightarrow k\leq n \\ n\cdot\cos(\infty) \text{ für } k-n-1=0 \Leftrightarrow k=n+1 \\ 0 \text{ für } k-n-1>0 \Leftrightarrow k\geq n+2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \begin{cases} \nexists & k=1,\ n \text{ bel.} \\ -n\cdot\cos(\infty) & k=n+1 \\ 0 & k\geq n+2 \end{cases} \qquad \text{analog für } \lim_{x\to 0^-}$$

Also f an 0 links- und rechtsseitig diffbar für $k\neq 1$ $\Rightarrow$ diffbar auf $\mathbb{R}$

f stetig diffbar an 0 für $k\geq n+2$.

354) $f(x) = 2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ $\qquad D(f) = [-1, 1]$

$f^{\ddagger}(x)$ diff.bar $\Leftrightarrow \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ diffbar $\Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} \in (-1, 1)$

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1 \Leftrightarrow 2|x| < 1+x^2 \Leftrightarrow 0 < 1 - 2|x| + x^2 \Leftrightarrow 0 < (1-|x|)^2$$
$$\Leftrightarrow 0 < 1-|x|$$
$$\Leftrightarrow |x| < 1$$

$\Rightarrow f(x)$ diff. bar für $|x| < 1$

$$f'(x) = (2 \arctan x)' - \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)'$$
$$= 2 \arctan' x - \arcsin' \frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot (2x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{2}{1+x^2} \cdot \left(1 - \frac{1-x^2}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}} \cdot (1+x^2)}\right)$$
$$= \frac{2}{1+x^2} \cdot \left(1 - \frac{1 \cancel{1-x^2}}{\frac{\cancel{1-x^2}}{\cancel{1+x^2}} \cdot \cancel{1+x^2}}\right) = 0$$

$\Rightarrow f^{\ddagger}(x)$ konstant auf $(-1, 1)$

$f(0) = 2 \arctan 0 - \arcsin \frac{0}{1} = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in (-1, 1)$

$f(-x) = 2 \arctan(-x) - \arcsin \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x)$

$f(1) = 2 \arctan 1 - \arcsin \frac{2}{2} = 2 \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0 = f(-1)$

also Beh. auch ~~für die~~ an den Intervallrändern richtig.

360) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}$ mit $f(x) = |x|$ auf $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ mit Periode 1 auf $\mathbb{R}$ fortges. z.B $f(1) = f(0)$

Beh. 1: g ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, $D(g) = \mathbb{R}$

$$\mathcal{Y} := \{ \underset{\in \mathbb{R}}{x} - k \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right], k \in \mathbb{Z} \text{ passend} \}$$

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathcal{Y}) = \left[0, \tfrac{1}{2}\right]$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(4^{n-1}x)}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(y)}{4^{n-1}} \quad \in \mathcal{Y} \text{ passend}$$

$$\sqrt[n]{|g_n|} = \sqrt[n]{\frac{4\, f(y)}{4^n}} = \frac{\sqrt[n]{4 \cdot f(y)}}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|g_n|} = \frac{1}{4} < 1$$

also $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ konv. lt. Wurzelkriterium, d.h. die Grenzfunktion $g(x)$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}$

Beh. 2: g ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

(1) g_n stetig $\forall x \in \mathbb{R}$ da Kompos. von stetigen Funktionen.

$$\frac{f(4^{n-1}x)}{4^{n-1}} < \frac{1}{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |g_n| < \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n}$ konvergente (geom. Reihe) Majorande (von x unabh.)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ gleichm. konvergent auf $\mathbb{R}$ (2)

Aus (1) und (2) folgt die Stetigkeit von $g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (S 77)

362) Beweis mit Induktion:

IA: $k = 0$ $\quad g \circ f = g \circ f$
$k = 1$ $\quad (g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$ (Kettenregel)

IB: $(g \circ f)^{(k)} = (g^{(k)} \circ f)(f')^k + T(k-1) + (g' \circ f) f^{(k)}$ wobei $T(k-1)$ nur Terme umfasst, in denen f, g mit Diff.-Graden $\leq k-1$ auftreten.

IS: $$(g \circ f)^{(k+1)} = \left((g \circ f)^{(k)}\right)' = (g^{(k+1)} \circ f) \cdot f' \cdot (f')^k + \underbrace{(g^{(k)} \circ f) \cdot k f' f'' + (T(k-1))' + (g'' \circ f) \cdot f' \cdot f^{(k)}}_{=: T(k)} + (g' \circ f) \cdot f^{(k+1)} = (g^{(k+1)} \circ f) \cdot (f')^{k+1} + T(k) + (g' \circ f) \cdot f^{(k+1)}$$

Also kann $(g \circ f)^{(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ als Lin.-Komb. von $(g^{(k)} \circ f)$, $f^{(k)}$ und Termen niedrigeren Diff.-Grades dargestellt werden.

368) $f(x) = \sin x \cdot \cosh x$

$$f^{(11)} = \left(\sin x \cdot \cosh x\right)^{(11)} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} f^{(k)}(x) g^{(11-k)}(x)$$

k gerade: $\binom{11}{k}(-1)^{\frac{k}{2}} \sin x \sinh x$

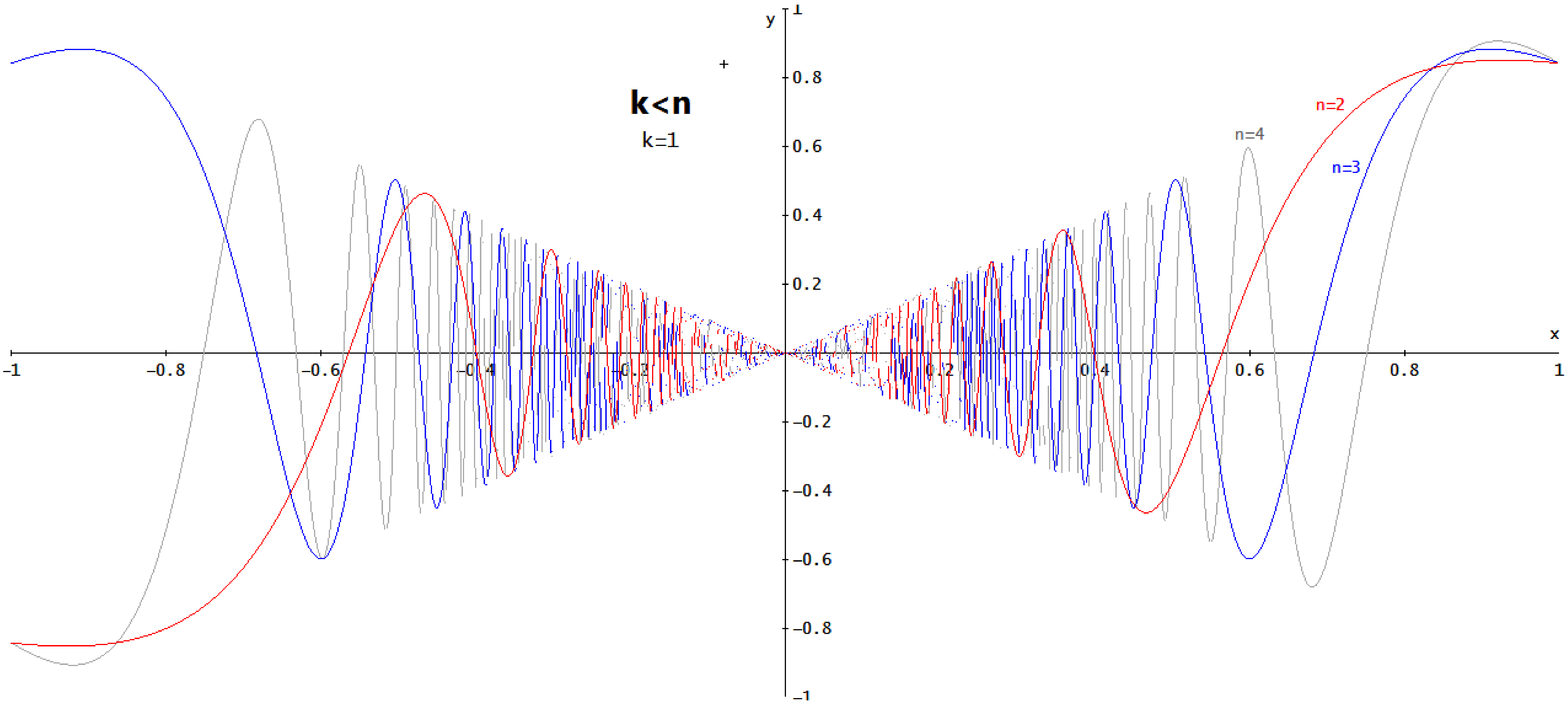
k ungerade: $\binom{11}{k}(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos x \cosh x$

$$= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \left(\binom{11}{2k} \sin x \sinh x + \binom{11}{2k+1} \cos x \cosh x \right)$$

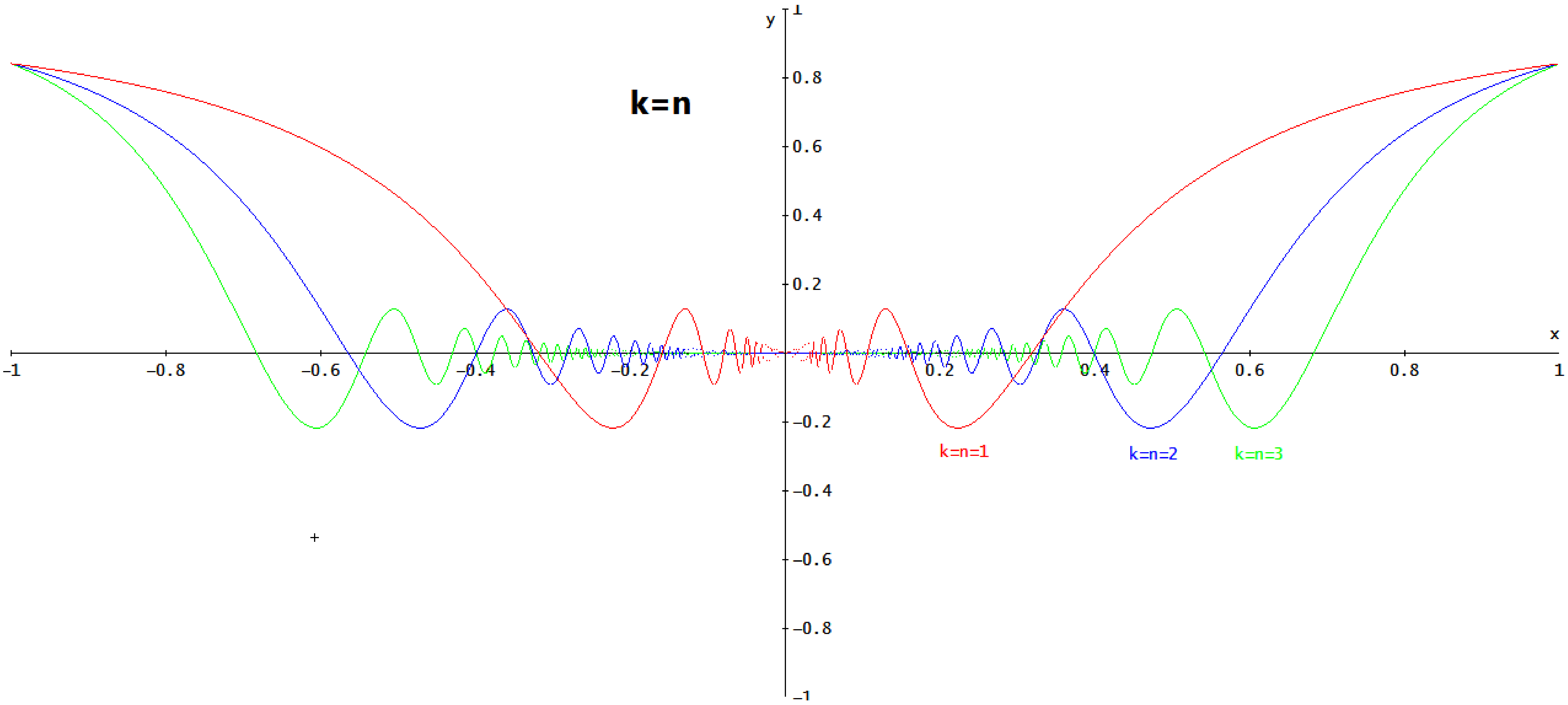
$$= \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \left(\binom{11}{2k} \sin x \sinh x - \binom{11}{11-2k} \cos x \cosh x \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{11}{2k}}_{=-32} \cdot \left(\sin x \sinh x - \cos x \cosh x \right)$$

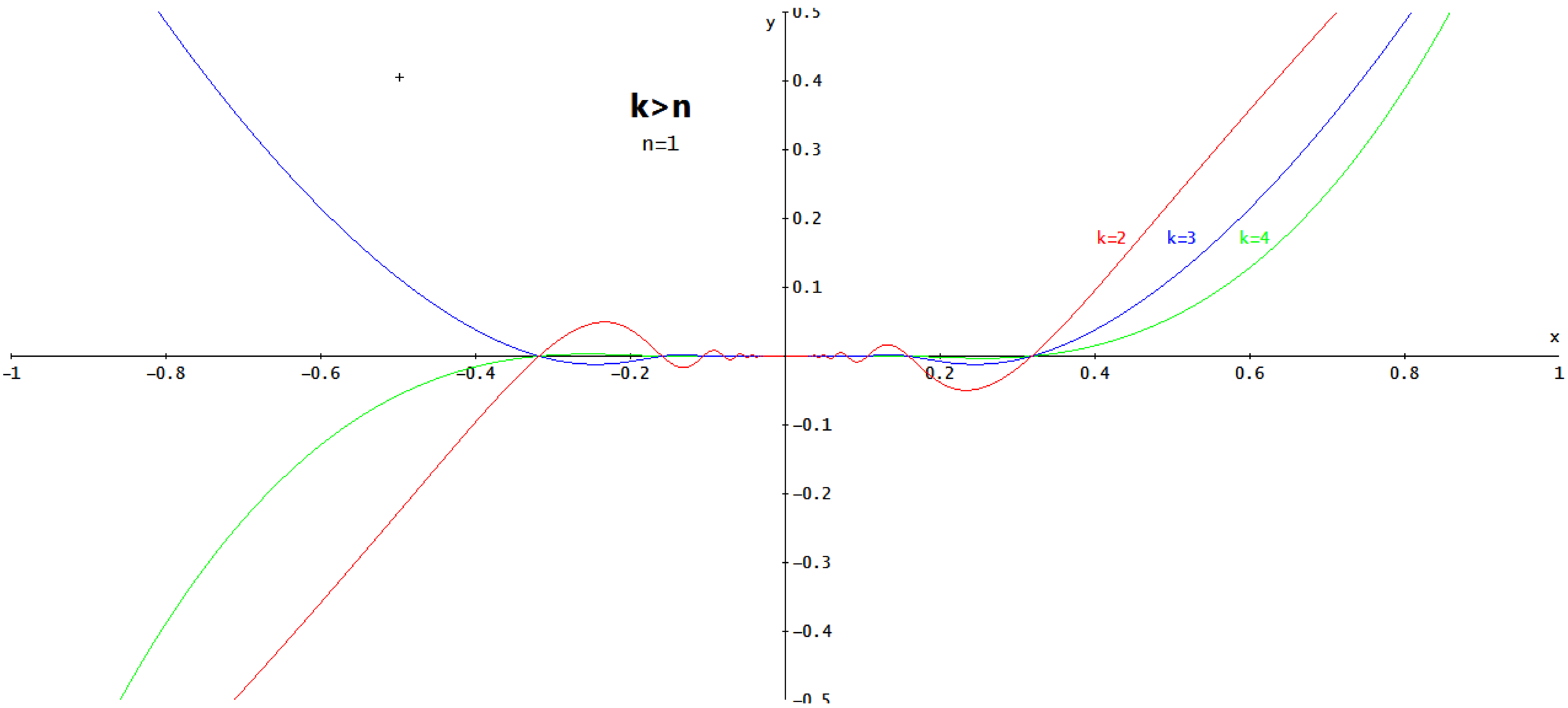
$$\Rightarrow f^{(11)} = -32 \cdot (\sin x \sinh x - \cos x \cosh x)$$
$$= 32 \cdot (\cos x \cosh x - \sin x \sinh x)$$



k<n
k=1
n=2
n=3
n=4
x
y
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1



k=n
k=n=1
k=n=2
k=n=3
x
y
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1



k>n
n=1
k=2
k=3
k=4
x
y
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5