19.01.09

Analysis UE

XII, 315, 320, 325, 327, 330, 341

315)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{k-n}{k^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}-\frac{n}{k^2}}{1+\frac{n^2}{k^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{0-0}{1+0}=0$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{k-n}{k^2+n^2}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k}{n^2}-\frac{1}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{0-0}{0+1}=0$$
$\Big\}\ a:=0$

$$|a-a_{nk}|<\varepsilon \Leftrightarrow |a_{nk}|<\varepsilon$$

$$|a_{nk}|=\frac{|k-n|}{k^2+n^2}\underset{\uparrow}{\le}\frac{\cancel{k+n}}{(k+n)\cancel{(k+n)}}\quad\frac{\cancel{k+n}}{\frac{1}{2}(k+n)^2}=\frac{2}{k+n}\le\frac{2}{k}\quad \text{bzw.}\le\frac{2}{n}$$
$$\left(k^2+n^2\ge\frac{k^2+n^2}{2}+nk=\frac{1}{2}\left(k^2+2nk+n^2\right)\right)$$

$$\Rightarrow |a_{nk}|\le\frac{2}{k}<\varepsilon\Leftrightarrow k>\frac{2}{\varepsilon}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

also $\{a_{nk}\}\to 0$ gleichmäßig bei $k\to\infty$
analog für $n\to\infty$

320)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{x+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{x+n}}_{=:a_n}$$

Beh. 1: Reihe abs. konvergiert für $x>1$.

Bew.: Sei $x\ge 0$. Benutze Raabe-Kriterium (keine Divergenzaussage!):
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=n\cdot\left(\frac{\frac{n!}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}}{\frac{(n+1)!}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)(x+n+1)}}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x+n+1}{n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\cancel{1}+\frac{x}{n+1}-\cancel{1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty} n\,\frac{x}{n+1}=\lim_{n\to\infty} x\cdot\frac{n}{n+1}=x\cdot\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1}=x>1$$

Beh. 2: Reihe divergent für $x=1$.
Bew.:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2\cdot3\cdot\ldots\cdot(1+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{!}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$
(harmon. Reihe)

Beh. 3: Reihe divergent für $x=0$.
Bew.:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot\ldots\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$$

Beh. 4: Reihe divergent für $x < 0$.

Bew.: $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \cancel{\mathbb{R} \setminus \{-1, \dots, -n\}} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{Z} < 0\}$

$$\Rightarrow \exists N(x) \in \mathbb{N} \text{ mit } x + N(x) \in (0,1) \Rightarrow \underbrace{\frac{N(x)}{x+N(x)}}_{\cancel{\text{[illegible]}}} > 1$$

Es gilt $n > x+n$ $\forall n \geq N(x)$ daher als $N(x)$. Term alle Faktoren > 1.

$\Rightarrow a_{N(x)} < \lambda \cdot a_{N(x)} \leq a_{N(x)+1}$ für passendes $\lambda > 1$.

$\{a_n\}$ ist also keine Nullfolge.

Beh. 5: Reihe divergent für $x \in (0,1)$

$$a_n = \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} > \frac{n!}{2 \cdot \ldots \cdot (1+n)} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{div. lt. Beh. 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also Reihe divergiert für $x \in (0,1)$ lt. Minorantenkriterium.

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich der Funktionenreihe: $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

325) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n^2-1}}{n^2-6n+16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-6n+16} \cdot \frac{(x+1)^{n^2}}{x+1} = \frac{1}{x+1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-6n+16} (x+1)^{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\underbrace{x+1}_{x_0=-1})^n \text{ mit } a_n := \begin{cases} \frac{1}{k^2-6k+16} & \text{wenn } n = k^2 \text{ mit } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Konvergenz~~test~~bereich:

a) Wurzelkriterium:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2-6n+16} \cdot \left| \frac{(x+1)^{n^2}}{x+1} \right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2-6n+16}} \cdot \frac{|x+1|^n}{\sqrt[n]{|x+1|}}$$

$$= \cancel{\lim_{n\to\infty}} |x+1|^n < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 1 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$$

b) Cauchy-Hadamard:

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2-6k+16}}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k^2-6k+16} \approx \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k^2} = 1$$

$$x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) = (-2, 0)$$

Betrachte Randpunkte:

$$x=0: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-6n+16} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{konvergent (hyperharm. Reihe)}$$

$$x=-2: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2-1}}{n^2-6n+16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2-6n+16}$$

<u>Leibnitzkriterium:</u>

- alt. Reihe ✓
- monotone Nullfolge $\{|a_n|\}$?

$$\cancel{n^2-6n+16}$$

$$|a_n| \geq |a_{n+1}| \Leftrightarrow n^2-6n+16 \leq (n+1)^2 - 6(n+1) + 16 = n^2-4n+11$$

$$\Leftrightarrow \cancel{n^2}-6n+16 \leq \cancel{n^2}-4n+11$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow \{|a_n|\}$ mon. Nullfolge ab $n=3$

Also Konvergenzbereich $K = [-2, 0]$

Die Potenzreihe folgt gleichm. Konvergenz auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $a<b;\ a,b \in K$

Grenzfunktion stetig auf $(-2,0)$, links- bzw. rechtsseitig stetig an 0 bzw. -2.

330) $$f(x) = \frac{x^2-3x}{1-x^2+3x} = (x^2-3x) \cdot \frac{1}{1-(x^2-3x)} = (x^2-3x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (x^2-3x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x^2-3x)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^2-3x)^n$$

327) $$\arcsin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{6!} x^5 - \ldots$$

Bilde $\sin(\arcsin x) \stackrel{=x}{}$ durch Einsetzen:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) - \frac{1}{3!}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^3 + \frac{1}{6!}(a_0 + a_1 x + \ldots)^5 \ldots = x$$

<u>Koeffizientenvergleich:</u>

$$\left.\begin{array}{ll} x^0: & a_0 - \frac{1}{3!} a_0^3 + \frac{1}{6!} a_0^5 + \ldots = 0 \quad \Leftarrow a_0 = 0 \\ x^1: & a_1 - \underbrace{\frac{3}{3!} a_1 a_0^2}_{0} \underbrace{\pm \ldots}_{0} = 1 \quad \Leftrightarrow a_1 = 1 \\ x^2: & a_2 - \underbrace{\frac{3}{3!} a_2 a_0^2 - \frac{3}{3!} a_1^2 a_0}_{0} \underbrace{\pm \ldots}_{0} = 0 \Leftrightarrow a_2 = 0 \\ x^3: & a_3 - \frac{a_1^3}{6} \pm \ldots = 0 \quad \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 \pm \ldots$$

$\vdots$

$$341)\quad f(x) = \frac{\cos 2x - \cosh 2x}{\sin x - \sinh x} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{(2n)!}(2x)^{2n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}} \qquad (-1)^n-1 \begin{cases} -2 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{(4n+2)!}(2x)^{4n+2}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{(4n+3)!}x^{4n+3}} = \frac{\cancel{-2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+2)!}(2x)^{4n+2}}{\cancel{-2}x^{2}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!}x^{4n+1}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!}x^{4n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!}x^{4n+1}} \qquad \begin{matrix} =: Z(x) \\ \\ =: N(x) \end{matrix}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{\frac{2^2}{2!}\cdot 1}{0} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$